

• Índice

• <i>Introdução</i>	3
<i>Definições</i>	3
• <i>Função de transferência de um filtro</i>	4
• <i>Classificação e especificação de filtros</i>	5
<i>Filtro passa-baixo</i>	5
<i>Filtro passa-alto</i>	6
<i>Filtro passa-banda</i>	7
<i>Filtro rejeita-banda</i>	8
• <i>Filtros passivos de primeira ordem</i>	8
<i>Resposta em frequência de um filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem</i>	9
<i>Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem</i>	11
<i>Resposta em frequência de um filtro passivo passa-alto de 1ª ordem</i>	13
<i>Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-alto de 1ª ordem</i>	15
• <i>Filtros passivos de segunda ordem</i>	16
<i>Resposta em frequência de um filtro passivo passa-baixo de 2ª ordem</i>	16
<i>Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-baixo de 2ª ordem</i>	20
• <i>Filtros activos de primeira ordem</i>	21
<i>Resposta em frequência de um filtro activo-RC passa-baixo de 1ª ordem</i>	21
<i>Resposta ao escalão de um filtro activo-RC passa-baixo de 1ª ordem</i>	23
<i>Resposta em frequência de um filtro activo-RC passa-alto de 1ª ordem</i>	24
<i>Resposta ao escalão de um filtro activo-RC passa-alto de 1ª ordem</i>	26

• *Introdução*

Os filtros contínuos são blocos lineares básicos utilizados em diversos sistemas electrónicos. São blocos imprescindíveis na generalidade dos circuitos de transmissão e recepção de sinal, nomeadamente para a realização de filtros anti-aliasing ou de reconstrução. São igualmente úteis na rejeição de ruído, ou na implementação de moduladores/desmoduladores. Este capítulo estuda a classificação, especificação, resposta temporal e em frequência de filtros analógicos de primeira e segunda ordem.

A análise do comportamento dos filtros contínuos pode ser caracterizada pela sua resposta em frequência. Neste âmbito é geralmente utilizada a sua função de transferência no domínio da transformada de Laplace. A representação do diagrama de amplitude e do diagrama de fase permite uma análise completa do comportamento do filtro. Consequentemente, o diagrama de Bode de um filtro contém a informação necessária e suficiente para o estudo da resposta em frequência do bloco a um sinal de entrada genérico.

A resposta de um filtro no domínio do tempo está intimamente relacionada com a sua resposta em frequência. Aliás, a equação diferencial que define a forma de onda da saída, para um dado sinal de entrada, está implícita na função de transferência do filtro. O estudo da resposta de um filtro a um escalão unitário é a forma mais comum de estudar o seu comportamento neste domínio.

Seguidamente são analisadas as arquitecturas passivas e activas básicas usadas na realização de filtros contínuos, bem como os seus campos de aplicação privilegiados. Neste âmbito, são estudados os filtros de Butterworth, Chebyshev e elípticos.

Definições

f_c ∴ Frequência de corte - frequência à qual a potência do sinal de saída do filtro, é metade da potência do sinal à sua entrada.

τ ∴ Constante de carga em regime transitório.

ω_0 ∴ Frequência angular de ressonância.

Q ∴ Factor de qualidade de um par de pólos (ou zeros) complexos.

- *Função de transferência de um filtro*

A forma mais simples, e mais comum, de caracterizar o comportamento de um filtro é através do cálculo da sua função de transferência $T(S)=V_o(S)/V_i(S)$, no domínio da transformada de Laplace. Ou seja, o estudo do bloco pode ser feito directamente a partir da relação entre o sinal de saída e o sinal de entrada. Este princípio básico da análise de sistemas lineares e invariantes no tempo permite simplificar e generalizar o estudo de qualquer circuito, independentemente da arquitectura interna utilizada para implementar o filtro. A figura seguinte representa um filtro genérico de duplo porto, definido no domínio da transformada de Laplace, e é válida para sistemas diferenciais ou não diferenciais (*single-ended*).

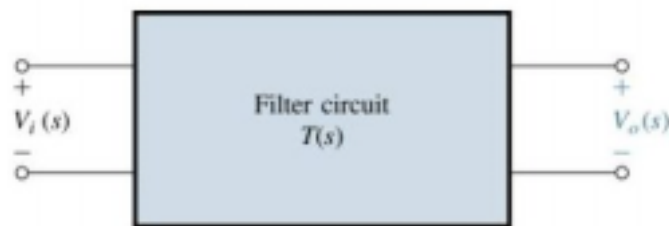


Figura 1. Representação de um filtro genérico através da sua função de transferência no domínio da transformada de Laplace.

O estudo das singularidades do filtro, ou seja, o cálculo dos pólos e zeros da função de transferência, e a sua representação no plano de Argand, servem de base para a representação do diagrama de amplitude e do diagrama de fase. Os zeros de um filtro correspondem aos valores de S que anulam o numerador da função de transferência, representados na seguinte equação por $z_1, z_2 \dots z_M$. Os pólos do filtro, são os valores de S que anulam o denominador de $T(S)$, representados por $p_1, p_2 \dots p_N$.

$$T(S) = \frac{V_o}{V_i}(S) = A \cdot \frac{(S - z_1) \cdot (S - z_2) \cdots (S - z_M)}{(S - p_1) \cdot (S - p_2) \cdots (S - p_N)}$$

Qualquer função de transferência pode ser simplificada de modo a poder ser representada por uma equação semelhante à anterior. Para reduzir a equação a este formato basta factorizar $T(S)$ através do cálculo das raízes dos polinómios do numerador e denominador da função de transferência do filtro. Estas raízes podem ser números reais ou pares de complexos conjugados, pelo que se justifica a sua representação num diagrama de Argand. Note-se que os pólos do filtro devem estar no semiplano complexo esquerdo, dado que caso contrário o filtro será instável.

- *Classificação e especificação de filtros*

Existem quatro classes básicas de filtros, cuja denominação depende das frequências que rejeitam ou deixam passar: passa-baixo, passa-alto, passa-banda e rejeita-banda.

Filtro passa-baixo

Os filtros analógicos passa-baixo são os mais comuns. A figura seguinte representa $|T(S)|$, i.e. a amplitude da função de transferência em função da frequência angular ω (neste exemplo, em escala linear).

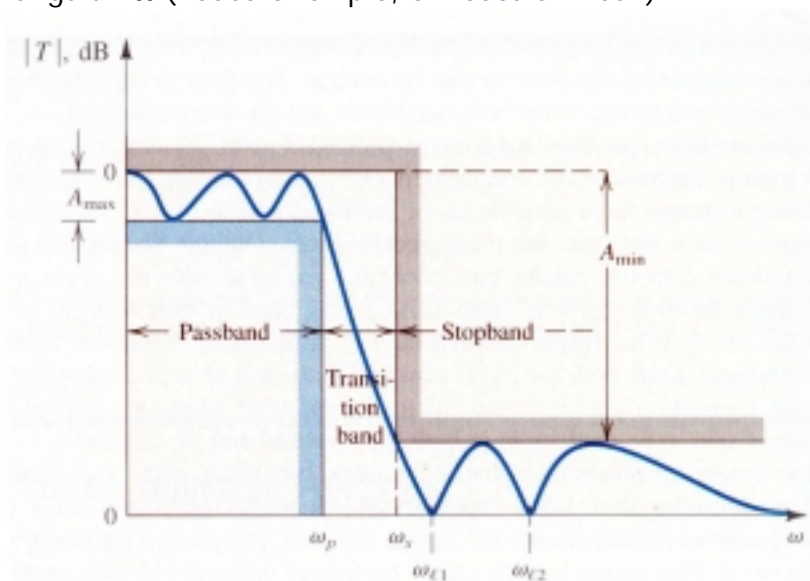


Figura 2. Especificação de filtros passa-baixo.

Na figura é fácil identificar três bandas de frequência distintas: banda de passagem, banda de transição e banda de corte. A banda de passagem - *passband* - corresponde às frequências do sinal de entrada que passam para a saída sem atenuação ou com atenuação ligeira. A banda de corte - *stopband* - corresponde à gama de frequências do sinal de entrada que são rejeitadas pelo filtro. A banda de transição é a zona intermédia entre as duas anteriores, nesta zona o comportamento do filtro varia entre a atenuação ligeira e a rejeição do sinal de entrada. Geralmente é desejável que os filtros apresentem nesta zona uma característica de amplitude bastante vertical e bem definida, daí que seja comum o recurso a filtros de ordem elevada.

Nos filtros passa-baixo, a banda de passagem é toda a banda contida entre DC ($\omega=0$) e a frequência angular ω_p assinalada na figura, i.e. corresponde aos valores de $\omega \in [0, \omega_p]$. Geralmente, ω_p é a frequência angular para a qual está definida a máxima variação de $|T(S)|$ dentro da banda de passagem, denominada ondulação na banda de passagem, que neste caso corresponde a

$|T(S \leq j\omega_p)| \geq A_{max}$. A especificação da banda de corte tem por base a definição de um valor mínimo de atenuação a uma dada frequência, e.g. $|T(S \geq j\omega_s)| \leq A_{min}$. Neste caso, a banda de corte é toda a gama de frequências entre ω_s e infinito, ou seja $\omega \in [\omega_s, +\infty [$.

É frequente não haver especificação explícita de ω_p e/ou de ω_s , nestes casos deve considerar-se que o(s) valor(es) não especificado(s) coincide(m) com o valor da frequência angular de corte, dada por $\omega_c = 2\pi f_c$. Consequentemente é comum considerar que a banda de passagem de um filtro passa-baixo corresponde às frequências angulares inferiores a ω_c , e que a banda de corte corresponde às frequências angulares superiores a ω_c .

A frequência de corte de um filtro é geralmente definida como a frequência à qual a potência do sinal de saída, é metade da potência do sinal de entrada. Dado que a potência é proporcional ao quadrado da tensão, a esta frequência a tensão de saída tem aproximadamente 70.7% do valor da tensão de entrada, ou seja:

$$\frac{P_o}{P_i} \Big|_{S = j\omega_c} = \frac{v_o^2}{v_i^2} (j\omega_c) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{v_o}{v_i} (j\omega_c) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \Rightarrow 20 \log_{10} |T(j\omega_c)| \cong -3dB$$

Filtro passa-alto

Os filtros passa-alto têm a funcionalidade complementar, ou seja, rejeitam as baixas frequências do sinal de entrada, e deixam passar as altas frequências. Assim, nestes filtros, a banda de passagem corresponde às frequências angulares superiores a ω_p , i.e. aos valores de $\omega \in [\omega_p, +\infty [$. Também neste caso, ω_p é definida juntamente com a ondulação máxima na banda de passagem, assim temos que $|T(S \geq j\omega_p)| \geq A_{max}$. A banda de corte, tal como no caso do filtro passa-baixo, é definida a partir de um valor mínimo de atenuação garantido pelo filtro a uma dada frequência, e.g. $|T(S \leq j\omega_s)| \leq A_{min}$. A banda de corte corresponde assim à gama de frequências angulares inferiores ou iguais a ω_s , ou seja a valores de $\omega \in [0, \omega_s]$.

A figura seguinte representa a amplitude da função de transferência de um filtro passa-alto em função da frequência angular ω

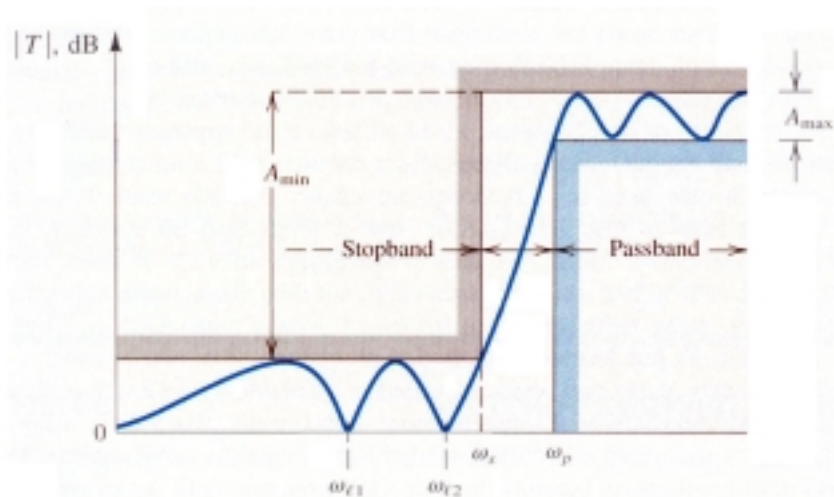


Figura 3. Especificação de filtros passa-alto.

Também neste caso, quando não é feita uma definição explícita dos valores de ω_p e ω_s , é comum considerar que a banda de passagem corresponde às frequências angulares superiores a ω_c , e que a banda de corte corresponde às frequências angulares inferiores a ω_c .

Filtro passa-banda

Os filtros analógicos passa-banda são bastante comuns em sistemas de comunicações, e.g. na realização de blocos de sintonia em receptores de rádio. São úteis para selecionar uma banda específica de interesse, rejeitando as restantes. A figura seguinte ilustra esta funcionalidade através da representação de $|T(S=j\omega)|$ em função da frequência angular.

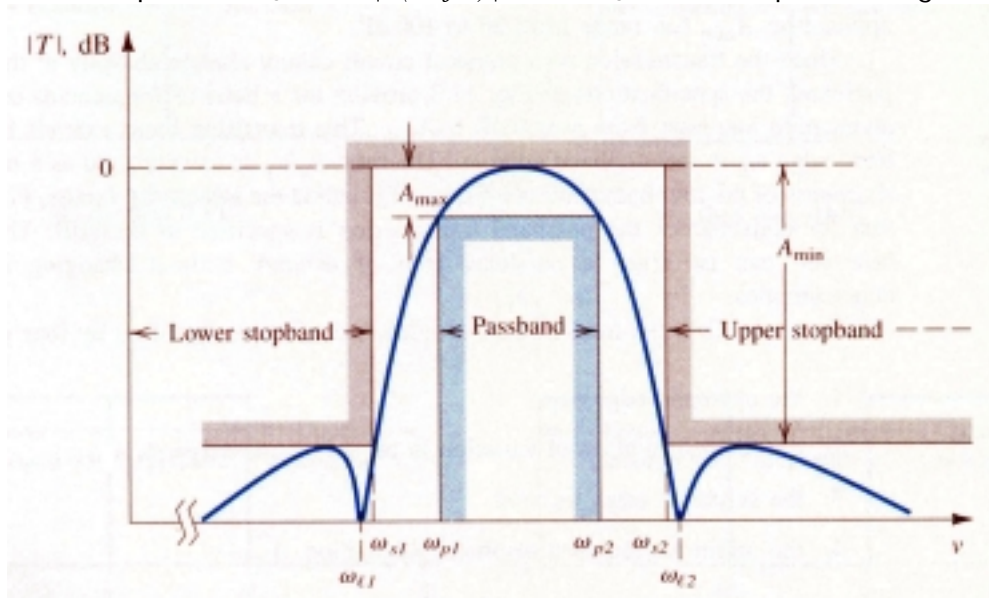


Figura 4. Especificação de filtros passa-banda.

A banda de passagem é neste caso definida entre duas frequências aqui representadas por ω_{p1} e ω_{p2} , que delimitam a zona do filtro em que

$|T(S)| \geq A_{max}$, ou seja, para os valores de $\omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$. Também neste filtro A_{max} define a ondulação na banda de passagem.

As bandas de corte (superior e inferior), correspondem às frequências para as quais se garante um nível mínimo de atenuação, i.e. $|T(j\omega)| \leq A_{min}$, ou seja para os valores de $\omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, +\infty[$.

Filtro rejeita-banda

Os filtros rejeita-banda realizam a função complementar do filtro passa-banda, ou seja, garantem um valor de atenuação $|T(j\omega)| \leq A_{min}$ dentro da banda de corte, definida para $\omega \in [\omega_{s1}, \omega_{s2}]$. Do mesmo modo, são geralmente dimensionados de modo a garantir um nível de ondulação A_{max} reduzido dentro das bandas de passagem, ou seja, de modo que $|T(S)| \geq A_{max}$ para os valores de $\omega \in [0, \omega_{p1}] \cup [\omega_{p2}, +\infty[$.

Estes filtros são especialmente úteis na rejeição de bandas muito adjacentes à banda de passagem, caso em que a sua funcionalidade é geralmente combinada com a de outros filtros. São também usados para suprimir interferências e/ou ruído, cuja banda de frequências seja limitada e bem conhecida. A figura seguinte representa o diagrama de amplitude de um filtro rejeita-banda com frequência de ressonância ω_0 . Note-se que ω_0 corresponde à média geométrica das frequências angulares de corte ω_1 e ω_2 , e que a largura da banda de corte é inversamente proporcional ao factor de qualidade Q .

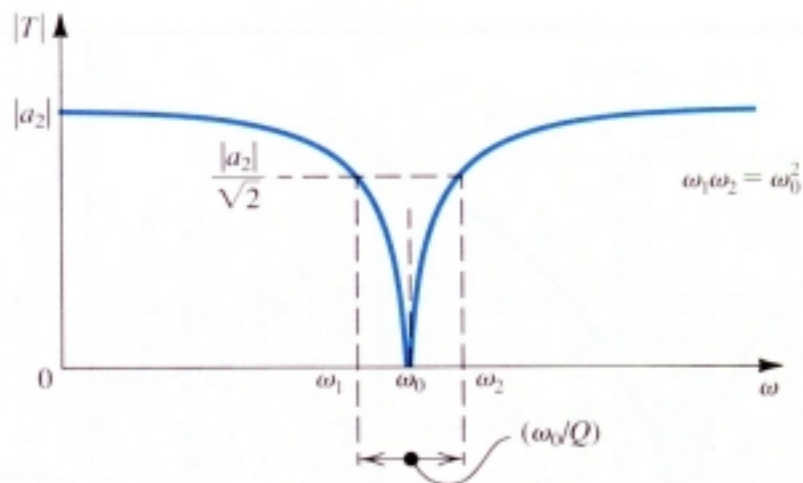


Figura 5. Diagrama de amplitude de um filtro rejeita-banda.

- Filtros passivos de primeira ordem

Existem duas famílias distintas de filtros: os filtros passivos e os filtros activos. Os filtros passivos são realizados usando apenas componentes passivos, i.e. resistências, condensadores e bobines. Os filtros activos

utilizam componentes activos, tais como AMPOPs, transconductores, ou simples transístores, em conjunto com os componentes passivos, de forma a realizar as funções de filtragem. Em ambas as famílias é possível implementar todas as classes de filtros apresentadas anteriormente. Os filtros passivos são mais simples de realizar e não necessitam de um circuito de alimentação e/ou de polarização, pelo que são uma opção comum em sistemas de componentes discretos. Em sistemas mais complexos, nomeadamente em circuitos integrados, o custo de qualquer componente externo é geralmente incomportável pelo que, desde que isso seja possível, a opção mais viável é geralmente a integração dos blocos de filtragem. Neste âmbito, é vasto o campo de aplicação para a realização de filtros activos e são variadas as formas de os implementar, tal como será estudado mais adiante.

Resposta em frequência de um filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem

Os circuitos passivos básicos utilizados para realizar um filtro passa-baixo são o circuito RL série e o circuito RC série. Caso o sinal de entrada seja uma fonte de corrente, os circuitos usados são os circuitos duais resultantes da aplicação do teorema de Norton, ou seja, o circuito RL paralelo e o circuito RC paralelo. A figura seguinte representa estes quatro circuitos.

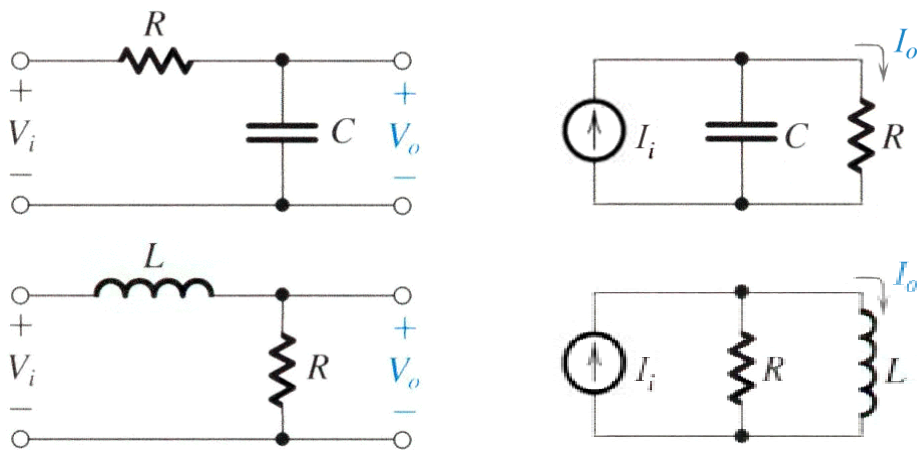


Figura 6. Circuitos utilizados para implementar filtros passivos passa-baixo de primeira ordem.

Tal como se deduz nas seguintes equações, estes circuitos conduzem a funções de transferência semelhantes, respectivamente:

$$\frac{V_o}{V_i}(S) = \frac{1}{R + \frac{1}{SC}} = \frac{1}{SRC + 1} \qquad \frac{I_o}{I_i}(S) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + SC} = \frac{1}{SRC + 1}$$

$$\frac{V_o}{V_i}(S) = \frac{R}{R + SL} = \frac{1}{\frac{SL}{R} + 1} \qquad \frac{I_o}{I_i}(S) = \frac{\frac{1}{SL}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{SL}} = \frac{1}{\frac{SL}{R} + 1}$$

Qualquer das equações anteriores se resume à equação seguinte, desde que seja definida a constante de carga em regime transitório τ , de acordo com o seguinte:

$$T(S) = \frac{1}{S\tau + 1} \qquad \text{definindo} \quad \tau = RC = \frac{L}{R}$$

A análise dos pólos e zeros da função de transferência revela a existência de apenas um pólo para $S = -\tau^{-1} = -\omega_c$, cuja representação no plano de Argand é ilustrada na figura seguinte.

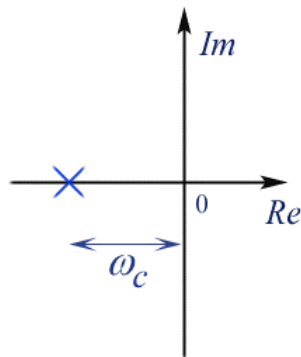


Figura 7. Representação das singularidades do filtro passivo passa-baixo de primeira ordem no plano de Argand.

A atribuição de valores a $S=j\omega$, permite o cálculo de $T(S)$ para todo o espectro, conseqüentemente, pode representar-se o diagrama de amplitude $|T(j\omega)|$ e o diagrama de fase, dado por $\arg(T(j\omega)) = \arctg [im(T(j\omega))/re(T(j\omega))]$. A representação de $20 \cdot \log_{10}(|T(j\omega)|)$ e de $\arg(T(j\omega))$ usando escala horizontal logarítmica corresponde ao diagrama de Bode, tal como é apresentado na figura seguinte.

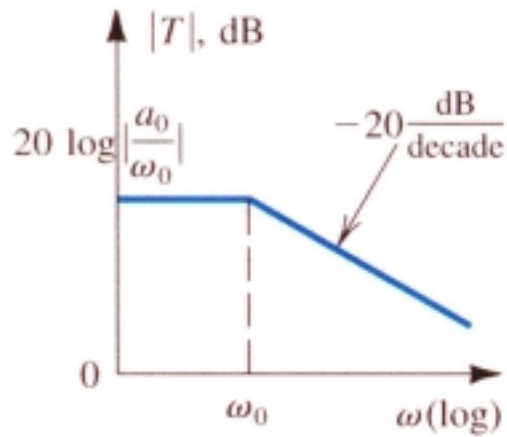


Figura 8. Diagrama de Bode de um filtro passa-baixo de primeira ordem.

O cálculo do ganho estático e do ganho para $S \rightarrow \infty$ representado nas equações seguintes corresponde aos valores visualizados na figura anterior.

$$T(S=0) = \frac{1}{S\tau+1} = 1 \quad T(S \rightarrow \infty) = \frac{1}{S\tau+1} = 0$$

O ponto de intersecção entre as duas asymptotas coincide com o valor em que a frequência angular ω é igual ao módulo do pólo do sistema. Este valor coincide ainda com a frequência angular de corte ω_c , já que corresponde à frequência para a qual $20 \cdot \log_{10}(|T(j\omega)|) = -3dB$, como se deduz da seguinte equação:

$$|T(S = j\tau^{-1})| = \left| \frac{1}{j\tau^{-1} \cdot \tau + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|T(S)|) = -3dB$$

Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-baixo de 1ª ordem

A análise do comportamento de um filtro no domínio do tempo é geralmente testada através da excitação do circuito com um escalão unitário. Considere-se o seguinte circuito apresentado anteriormente.

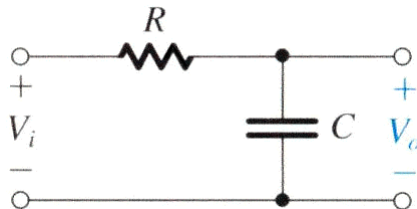


Figura 9. Filtro passivo passa-baixo de primeira ordem.

A análise deste circuito conduz à seguinte equação diferencial de primeiro grau:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{v_i(t) - v_c(t)}{R} \Rightarrow v_o(t) + RC \cdot \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} = v_i(t)$$

Cuja equação homogénia tem a seguinte solução:

$$v_o(t) = A \cdot \ell^{-\frac{t}{RC}}$$

A solução particular, quando a entrada é um escalão unitário, é o próprio escalão unitário, ou seja:

$$v_o(t) = u(t)$$

Consequentemente, a resposta geral do filtro a um escalão unitário, resultante da soma da solução da equação homogénia com a solução da equação particular, é dada pela seguinte expressão, em que a constante A depende de uma condição inicial,

$$v_o(t) = \begin{cases} A \cdot \ell^{-\frac{t}{RC}} + 1 & \leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \leftarrow t < 0 \end{cases}$$

esta condição inicial é imposta pela continuidade da tensão aos terminais do condensador no instante $t = 0$, e é dada por:

$$v_c(0) = 0 \Rightarrow v_o(0) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot \ell^0 + 1 \Rightarrow A = -1$$

Finalmente obtém-se a expressão da evolução temporal da tensão de saída

$$v_o(t) = \left(1 - \ell^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot u(t)$$

cuja representação está ilustrada na seguinte figura:

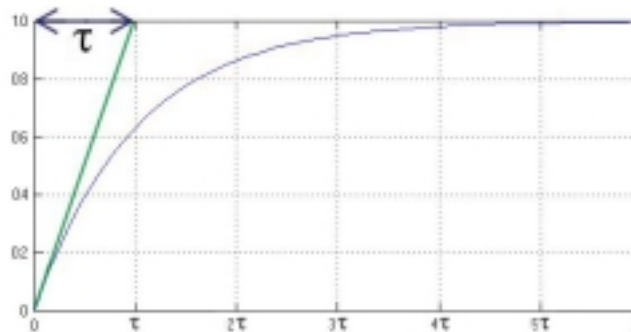


Figura 10. Resposta ao escalão unitário de um filtro passivo passa-baixo de primeira ordem.

Nesta figura assinala-se a constante de carga $\tau = RC$ que corresponde ao inverso da derivada na origem do sinal de saída. De notar igualmente, os valores do tempo de carga, correspondentes ao tempo que o sinal de saída demora a atingir 95% e 99% do valor final, respectivamente 3τ e 5τ .

$$\left. \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\ell^{-\frac{0}{RC}}}{RC} = \frac{1}{\tau}, \quad v_o(3\tau) = 1 - \ell^{-\frac{3RC}{RC}} \cong 0.95, \quad v_o(5\tau) = 1 - \ell^{-\frac{5RC}{RC}} \cong 0.99$$

A aplicação dos teoremas do valor inicial e do valor final confirma os cálculos do ganho estático e do ganho para $S \rightarrow \infty$.

$$\lim_{S \rightarrow \infty} T(S) = \frac{1}{S\tau + 1} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 0 \Rightarrow v_o(0) = 0$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} T(S) = \frac{1}{S\tau + 1} = 1 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 1 \Rightarrow v_o(\infty) = v_i(\infty)$$

Resposta em frequência de um filtro passivo passa-alto de 1ª ordem

Tal como no filtro passa-baixo, existem dois circuitos passivos básicos para realizar um filtro passa-alto quando os sinais de entrada e saída são tensões, e outros dois para o caso em que estes sinais são correntes. Relativamente aos circuitos RL e RC usados no caso anterior, note-se que a posição dos componentes está invertida. A figura seguinte representa estes circuitos.

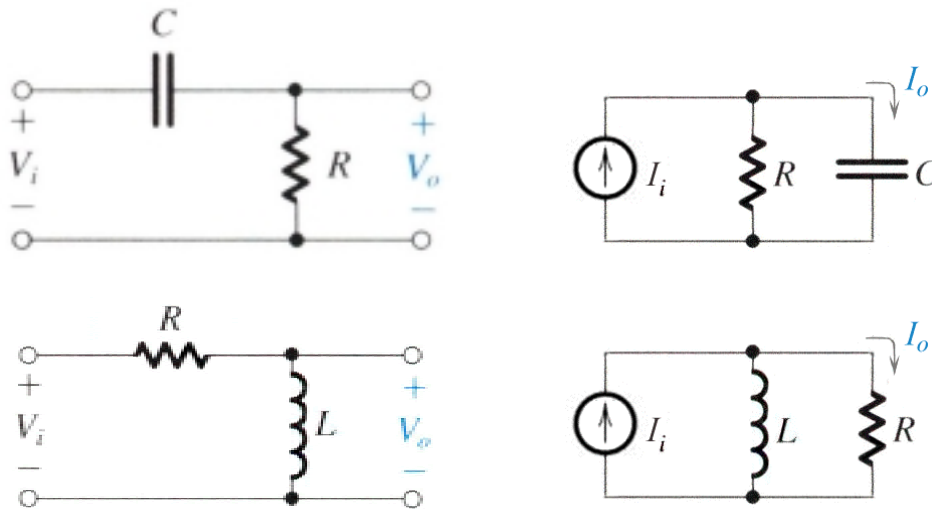


Figura 11. Circuitos utilizados para implementar filtros passivos passa-alto de primeira ordem.

As equações resultantes da aplicação da lei das malhas e dos nós a estes circuitos conduzem às seguintes funções de transferência:

$$\frac{V_o}{V_i}(S) = \frac{R}{R + \frac{1}{SC}} = \frac{SRC}{SRC + 1}$$

$$\frac{I_o}{I_i}(S) = \frac{SC}{\frac{1}{R} + SC} = \frac{SRC}{SRC + 1}$$

$$\frac{V_o}{V_i}(S) = \frac{SL}{R + SL} = \frac{\frac{SL}{R}}{\frac{SL}{R} + 1}$$

$$\frac{I_o}{I_i}(S) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{SL}} = \frac{\frac{SL}{R}}{\frac{SL}{R} + 1}$$

Usando a mesma definição da constante de carga τ , utilizada no caso dos filtros passa-baixo de primeira ordem, reduz estas equações anteriores à seguinte expressão:

$$T(S) = \frac{S\tau}{S\tau + 1} \quad \text{em que} \quad \tau = RC = \frac{L}{R}$$

A análise das singularidades da função de transferência revela a existência de um pólo em $S = -\tau^{-1} = -\omega_c$, e de um zero na origem, i.e. em $S = 0$. A representação destas no plano de Argand é ilustrada na seguinte figura.

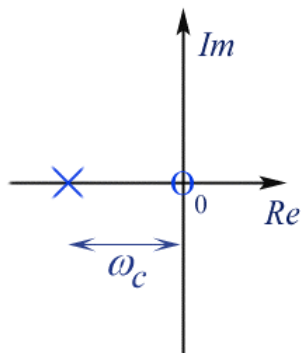


Figura 12. Representação das singularidades do filtro passivo passa-alto de primeira ordem no plano de Argand.

O diagrama de Bode da função de transferência $T(S)$, está representado na figura seguinte.

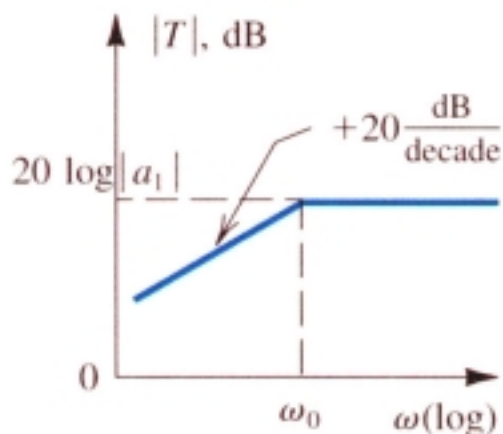


Figura 13. Diagrama de Bode de um filtro passa-alto de primeira ordem.

O ganho estático e do ganho para $S \rightarrow \infty$ são dados por:

$$T(S=0) = \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 0 \quad T(S \rightarrow \infty) = \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 1.$$

Também no filtro passa-alto, o ponto de intersecção entre as duas assíntotas coincide com a frequência angular de corte ω_c , cujo valor é igual ao módulo do pólo do sistema, como se deduz da seguinte equação:

$$|T(S = j\tau^{-1})| = \left| \frac{j\tau^{-1} \cdot \tau}{j\tau^{-1} \cdot \tau + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|T(j\tau^{-1})|) = -3dB$$

Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-alto de 1ª ordem

A resposta no domínio do tempo do filtro passa-alto a um escalão unitário pode ser estudada a partir do circuito seguinte.

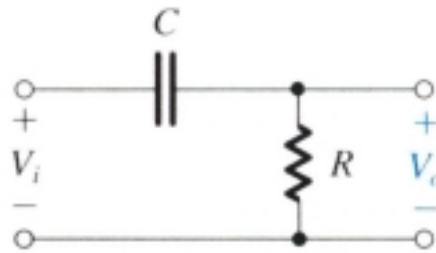


Figura 14. Filtro passivo passa-alto de primeira ordem.

A análise deste circuito conduz à seguinte equação diferencial de primeiro grau:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{v_i(t) - v_c(t)}{R} \Rightarrow v_c(t) + RC \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = v_i(t)$$

De notar que a tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = v_i(t) - v_c(t)$$

Tal como no caso do filtro passa-baixo, as soluções da equação homogénia, e do regime forçado a um escalão unitário são respectivamente:

$$v_c(t) = A \cdot \ell^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{e} \quad v_c(t) = u(t)$$

A tensão aos terminais do condensador é dada pela seguinte equação,

$$v_c(t) = \begin{cases} A \cdot \ell^{-\frac{t}{RC}} + 1 & \Leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \Leftarrow t < 0 \end{cases}$$

em que a constante A é imposta pela continuidade da tensão aos terminais do condensador no instante inicial, que implica que

$$v_c(0) = 0 \Rightarrow v_c(0) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot \ell^0 + 1 \Rightarrow A = -1,$$

peço que a evolução temporal do sinal de saída, tem a seguinte expressão

$$v_o(t) = u(t) - \left(1 - \ell^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot u(t) = \left(\ell^{-\frac{t}{RC}} \right) \cdot u(t),$$

ilustrada na seguinte figura.

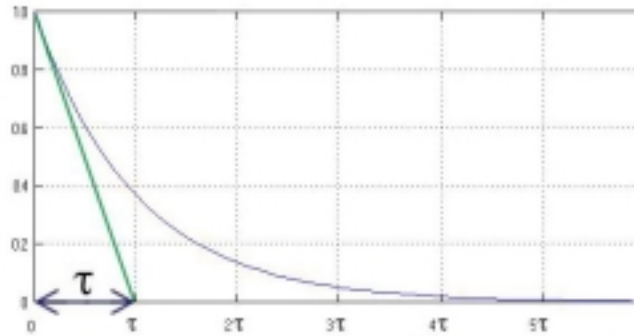


Figura 15. Resposta ao escalão unitário de um filtro passivo passa-alto de primeira ordem.

De constatar que também aqui se assinala a constante de carga $\tau = RC$, e os tempos correspondentes à descarga até 5% e 1% do valor inicial, respectivamente para $t = 3\tau$ e $t = 5\tau$.

$$\frac{\partial v_o}{\partial t}(0) = -\frac{\ell^{-\frac{0}{RC}}}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \quad v_o(3\tau) = \ell^{-\frac{3RC}{RC}} \cong 0.05, \quad v_o(5\tau) = \ell^{-\frac{5RC}{RC}} \cong 0.01$$

A aplicação do teorema do valor inicial e do teorema do valor final resulta nas equações seguintes, que confirmam os valores calculados para o ganho estático e para o ganho quando $S \rightarrow \infty$.

$$\lim_{S \rightarrow \infty} T(S) = \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 1 \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 1 \Rightarrow v_o(0) = v_i(0)$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} T(S) = \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 0 \Rightarrow v_o(\infty) = 0$$

• *Filtros passivos de segunda ordem*

Os filtros passivos de segunda ordem usam uma resistência e dois componentes reactivos, geralmente um condensador e uma bobina. A realização das várias classes de filtros apresentadas anteriormente será estudada de seguida.

Resposta em frequência de um filtro passivo passa-baixo de 2ª ordem

Um dos circuitos utilizados para realizar um filtro passivo passa-baixo de segunda ordem é o circuito RLC série, representado na figura seguinte. Caso os sinais de entrada e saída sejam correntes, pode usar-se o circuito RLC paralelo.

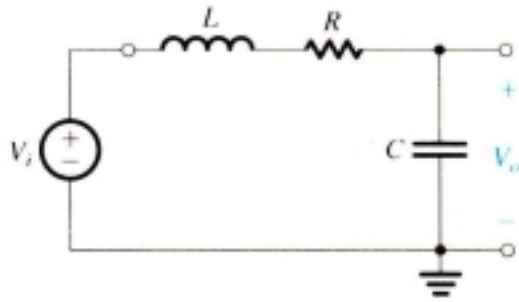


Figura 16. Exemplo de um circuito utilizado para implementar um filtro passivo passa-baixo de segunda ordem.

Aplicando a lei das malhas e dos nós ao circuito obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{V_o}{V_i}(S) = \frac{\frac{1}{SC}}{R + SL + \frac{1}{SC}} = \frac{1}{S^2 LC + SCR + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{S^2 + S \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

A equação anterior é geralmente escrita segundo a seguinte forma geral,

$$T(S) = A \cdot \frac{\omega_0^2}{S^2 + \frac{S\omega_0}{Q} + \omega_0^2}, \quad \text{em que se define } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ e } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

A constante A representa o ganho estático, que neste caso é unitário.

O estudo dos pólos e zeros da função de transferência revela a existência de dois pólos, dado que se trata de um polinómio de segunda ordem. Aplicando a fórmula resolvente ao denominador de $T(S)$ obtém-se:

$$S^2 + \frac{S\omega_0}{Q} + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow S = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}}{2}$$

O valor dos pólos depende do valor do factor de qualidade representado na equação por Q . Dependendo do valor deste parâmetro, pode resultar que os pólos sejam ambos reais, ou que sejam um par de pólos complexos conjugados.

Pode calcular-se o valor do factor de qualidade que corresponde à situação fronteira entre estas duas hipóteses, ou seja, ao valor que anula a raiz quadrada na equação anterior,

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4 \cdot \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} = 4 \cdot \omega_0^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow Q = \frac{1}{2} = 0.5,$$

note-se ainda que a este valor corresponde um pólo real duplo, assim temos que o valor dos pólos do filtro é dado por:

$$S = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} & \Leftarrow Q < 0.5 \quad (\text{dois p\u00f3los reais}) \\ -\frac{\omega_0}{2Q} & \Leftarrow Q = 0.5 \quad (\text{p\u00f3lo real duplo}) \\ -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} & \Leftarrow Q > 0.5 \quad (\text{dois p\u00f3los complexos conjugados}) \end{cases}$$

Caso o factor de qualidade seja inferior ou igual a 0.5 os p\u00f3los s\u00e3o ambos reais. Caso contr\u00e1rio, para representar os p\u00f3los complexos conjugados no plano de Argand, \u00e9 f\u00e1cil demonstrar que estes se encontram sobre uma semi-circunfer\u00eancia de raio igual a ω_0 , dado que:

$$|S| = \sqrt{\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} = \omega_0$$

e que os \u00e2ngulos que formam com o eixo horizontal s\u00e3o dados por:

$$\arg(S) = \arctg \frac{\text{im}(S)}{\text{re}(S)} = \arctg \left(\frac{\pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}{-\frac{\omega_0}{2Q}} \right) = \pi \pm \arctg \left(\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

Assim, caso os p\u00f3los da fun\u00e7\u00e3o de transfer\u00eancia sejam complexos conjugados, a sua representa\u00e7\u00e3o no plano de Argand ser\u00e1 a seguinte:

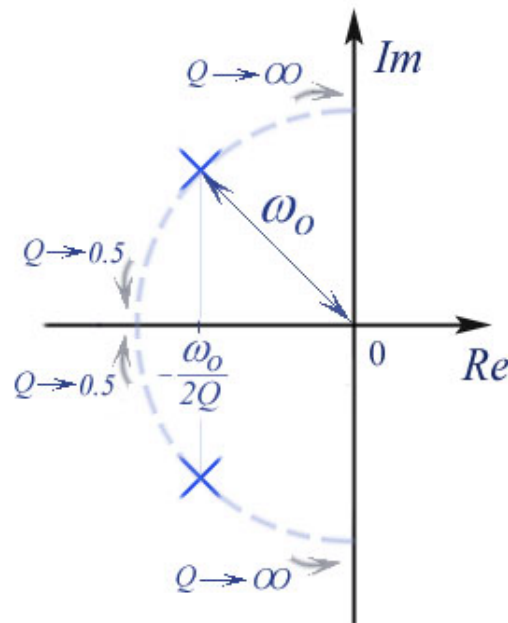


Figura 17. Representa\u00e7\u00e3o das singularidades do filtro passivo passa-baixo de segunda ordem no plano de Argand para $Q \geq 0.5$.

No caso de os pólos serem reais, estão tanto mais afastados um do outro, quanto mais baixo for o factor de qualidade. Naturalmente, à medida que $Q \rightarrow 0$ um dos pólos tende para $-\infty$ enquanto que o outro tende para zero. Este afastamento entre os pólos tem como consequência, que o pólo de frequência mais baixa se torne dominante em relação ao outro, ou seja, que o pólo de alta frequência seja negligenciável. Assim, para valores do factor de qualidade muito baixos o sistema aproxima-se muito de um filtro de primeira ordem. Não é portanto de estranhar que a generalidade dos filtros de segunda ordem com aplicação prática utilizem factores de qualidade superiores a 0.5. A figura seguinte representa as singularidades do filtro quando os pólos são ambos reais.

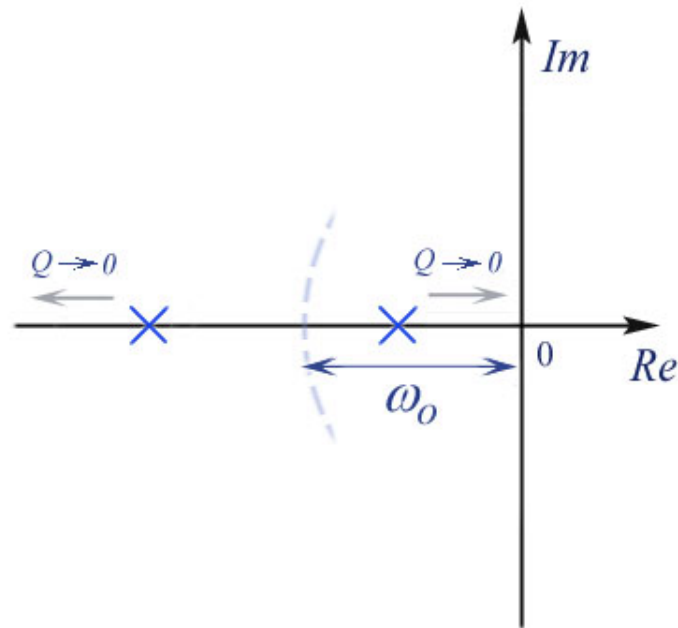


Figura 18. Representação das singularidades do filtro passivo passa-baixo de segunda ordem no plano de Argand para $Q \leq 0.5$.

A resposta em frequência do filtro obtém-se atribuindo valores a $S=j\omega$, de modo a calcular $T(S)$, cuja representação em diagrama de Bode é ilustrada na figura seguinte.

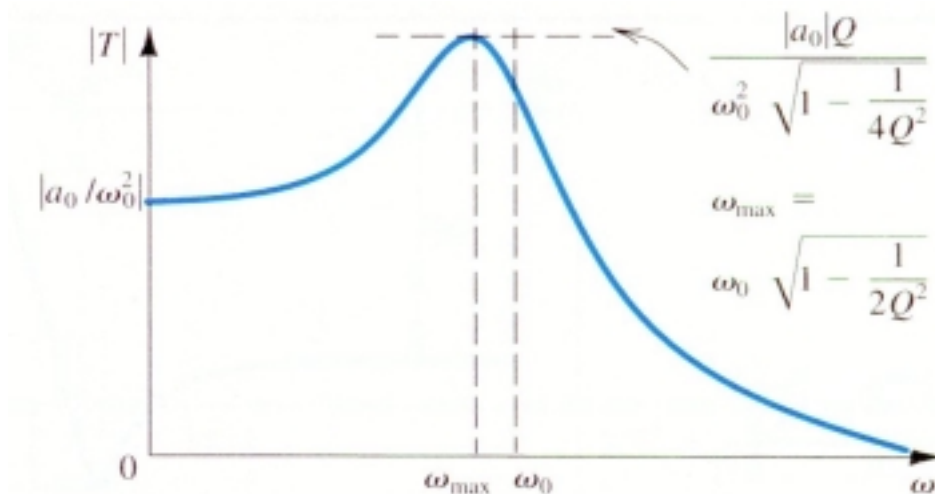


Figura 19. Diagrama de Bode de um filtro passa-baixo de segunda ordem.

O facto mais relevante na figura é a sobre-elevação no diagrama de amplitude, que é tanto mais elevada quanto maior é o factor de qualidade. Do mesmo modo, à medida que se aumenta Q , mais abrupta se torna a transição entre zero e π no diagrama de fase de $T(S)$.

O valor máximo de $|T(S)|$ é obtido para $\omega = \omega_{max}$, dados pelas seguintes equações:

$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{e} \quad |T(j\omega_{max})| = A \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Estes valores tendem respectivamente para a frequência angular de ressonância ω_0 , e para infinito, quando $Q \rightarrow \infty$. O ganho estático e o ganho quando $S \rightarrow \infty$, são dados pelas seguintes equações:

$$T(0) = \frac{\omega_0^2}{S^2 + \frac{S\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = 1 \quad T(S \rightarrow \infty) = \frac{\omega_0^2}{S^2 + \frac{S\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = 0$$

Resposta ao escalão de um filtro passivo passa-baixo de 2ª ordem

A análise do comportamento de um filtro no domínio do tempo é geralmente testada através da excitação do circuito com um escalão unitário.

A figura seguinte representa o caso em que o factor de qualidade é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, i.e. no caso do filtro de Butterworth.

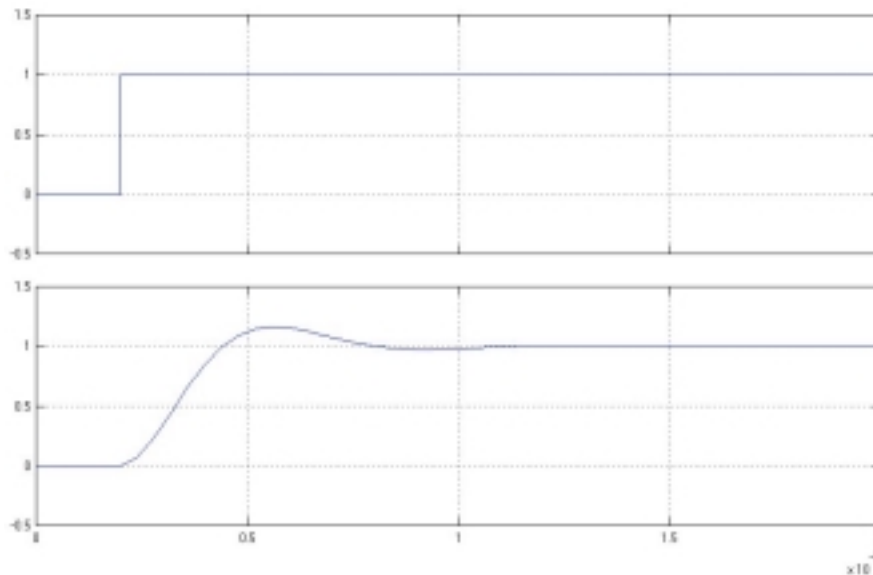


Figura 20. Resposta ao escalão unitário de um filtro passivo passa-baixo de segunda ordem.

- *Filtros activos de primeira ordem*

Existem várias formas de realizar filtros activos, cujos nomes derivam dos circuitos e componentes usados para os implementar. Entre estes, os mais comuns são os filtros activos-RC, MOSFET-C, gm-C e condensadores comutados. Os filtros activos-RC podem ser facilmente realizados tanto em circuito integrado como com componentes discretos, e devem a sua denominação ao facto de utilizarem amplificadores operacionais, resistências e condensadores.

Resposta em frequência de um filtro activo-RC passa-baixo de 1ª ordem

O circuito representado na figura seguinte tem por base a montagem integradora, e é usado para realizar um filtro activo-RC passa-baixo de primeira ordem.

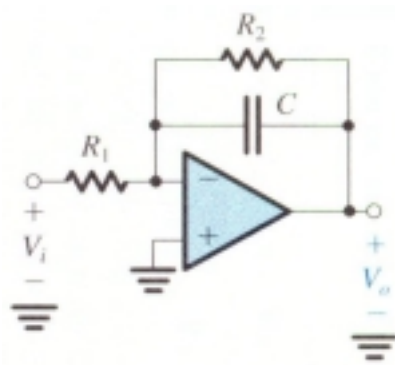


Figura 21. Filtro activo-RC passa-baixo de primeira ordem.

Assumindo que o AMPOP está na zona linear, que será o caso desde que a saída não sature, pode considerar-se que $V_- \approx 0$, pelo que facilmente se deduz a seguinte equação:

$$\frac{V_i - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_o}{R_2 // \frac{1}{SC}} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_o \cdot \left(R_2 + \frac{1}{SC} \right)}{R_2 \cdot \frac{1}{SC}} \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{SR_2C + 1}$$

Há duas diferenças básicas que se evidenciam face à expressão obtida para o filtro passivo passa-baixo: o ganho estático é negativo, i.e. o sinal de saída é invertido na banda de passagem, e o ganho estático é não unitário, podendo inclusivamente ser superior a um. De resto a função de transferência pode ser escrita sobre a seguinte forma,

$$T(S) = A \cdot \frac{1}{S\tau + 1}, \quad \text{em que} \quad \tau = R_2C \quad \text{e} \quad A = -\frac{R_2}{R_1}.$$

A função de transferência tem apenas um pólo para $S = -\tau^{-1} = -\omega_c$, cuja representação no plano de Argand, não difere da que foi obtida nos filtros passivos.

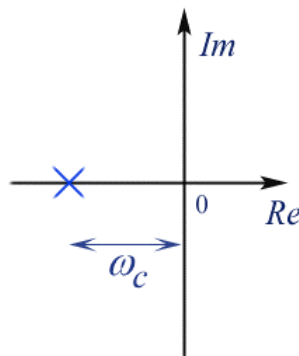


Figura 22. Representação no plano de Argand, das singularidades do filtro activo-RC passa-baixo de primeira ordem.

O ganho estático e o ganho quando $S \rightarrow \infty$ são dados pelas seguintes equações:

$$T(S=0) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{S\tau + 1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad T(S \rightarrow \infty) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{S\tau + 1} = 0$$

Note-se que o ganho estático é igual ao ganho da montagem inversora, já que para $S=0$ a impedância equivalente do condensador é infinita, e portanto, para baixas frequências, o circuito reduz-se ao circuito da montagem inversora. O diagrama de Bode representado de seguida reflete as diferenças identificadas anteriormente.

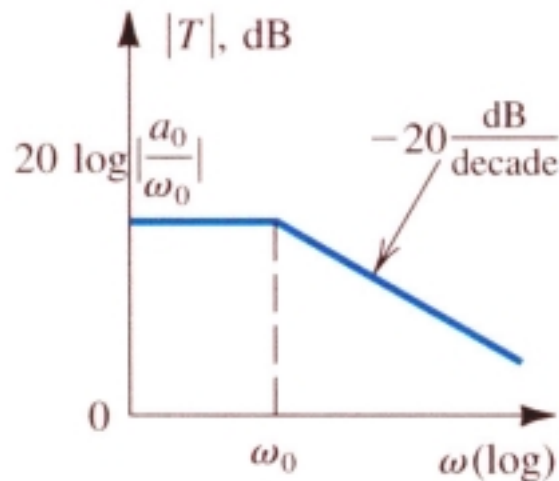


Figura 23. Diagrama de Bode do filtro activo-RC passa-baixo de primeira ordem.

O diagrama de fase está deslocado 180° relativamente ao que foi obtido para o filtro passivo, e o diagrama de amplitude tem como valor máximo $20 \cdot \log_{10}(R_2/R_1)$ em vez de 0 dB .

Resposta ao escalão de um filtro activo-RC passa-baixo de 1ª ordem

A análise do comportamento do filtro activo-RC passa-baixo no domínio do tempo, quando o estímulo de entrada é um escalão unitário, resulta da aplicação das leis malhas e dos nós ao circuito apresentado.

$$\frac{v_i(t)}{R_1} = -C \cdot \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} - \frac{v_o(t)}{R_2} \Rightarrow v_o(t) + R_2 C \cdot \frac{\partial v_o(t)}{\partial t} = -\frac{R_2}{R_1} v_i(t)$$

dado que $v_o(t) = -v_c(t)$.

A solução da equação diferencial é dada pela soma da solução da equação homogénia com a solução do regime forçado, dadas respectivamente por:

$$v_o(t) = A \cdot \ell^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad \text{e} \quad v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u(t)$$

A resposta ao escalão é dada pela seguinte equação:

$$v_o(t) = \begin{cases} A \cdot \ell^{-\frac{t}{R_2 C}} - \frac{R_2}{R_1} & \Leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \Leftarrow t < 0 \end{cases}$$

A condição inicial assegurada pela continuidade da tensão aos terminais do condensador no instante $t = 0$ permite calcular o valor de A :

$$v_c(0) = -v_o(0) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot \ell^0 - \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow A = \frac{R_2}{R_1}$$

Resulta que a expressão da evolução temporal da tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = \left(\ell^{-\frac{t}{R_2 C}} - 1 \right) \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot u(t)$$

cuja representação está ilustrada na seguinte figura:

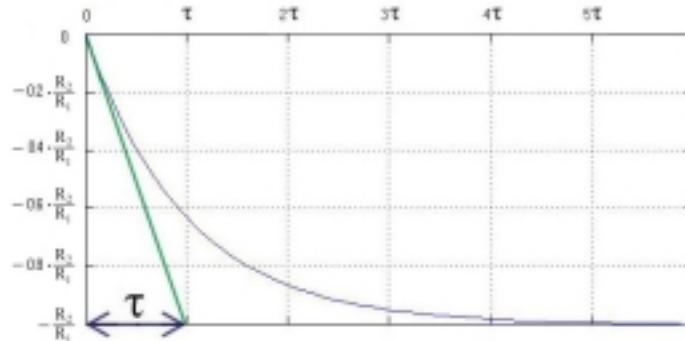


Figura 24. Resposta ao escalão unitário de um filtro activo-RC passa-baixo de primeira ordem.

Os valores correspondentes ao tempo de carga do sinal de saída, de modo a atingir 95% e 99% do valor final, continuam a ser 3τ e 5τ respectivamente.

$$\frac{v_o(3\tau)}{v_o(t \rightarrow \infty)} = \frac{\left(\ell^{-\frac{3R_2 C}{R_2 C}} - 1 \right) \cdot \frac{R_2}{R_1}}{-\frac{R_2}{R_1}} \cong 0.95, \quad \frac{v_o(5\tau)}{v_o(t \rightarrow \infty)} = \frac{\left(\ell^{-\frac{5R_2 C}{R_2 C}} - 1 \right) \cdot \frac{R_2}{R_1}}{-\frac{R_2}{R_1}} \cong 0.99$$

Da aplicação dos teoremas do valor inicial e do valor final resulta que:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} T(S) = A \cdot \frac{1}{S\tau + 1} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 0 \Rightarrow v_o(0) = 0$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} T(S) = A \cdot \frac{1}{S\tau + 1} = A \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = A \Rightarrow v_o(\infty) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_i(\infty)$$

Resposta em frequência de um filtro activo-RC passa-alto de 1ª ordem

O circuito representado na figura seguinte, que tem por base a montagem diferenciadora, realiza um filtro activo-RC passa-alto de primeira ordem.

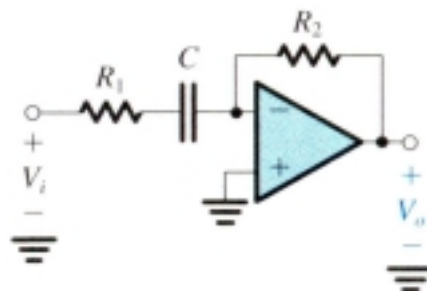


Figura 25. Filtro activo-RC passa-alto de primeira ordem.

Assumindo que o AMPOP está na zona linear, pode considerar-se que $V_- \approx 0$, daí resultando que:

$$\frac{V_i - V_-}{R_1 + \frac{1}{SC}} = \frac{V_- - V_o}{R_2} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1 + \frac{1}{SC}} = \frac{-V_o}{R_2} \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{SR_1C}{SR_1C + 1}$$

Também neste caso, o ganho quando $S \rightarrow \infty$ é negativo e não unitário. Assim, a função de transferência pode ser escrita sobre a seguinte forma,

$$T(S) = A \cdot \frac{S\tau}{S\tau + 1}, \quad \text{em que} \quad \tau = R_1C \quad \text{e} \quad A = -\frac{R_2}{R_1}.$$

A função de transferência $T(S)$ tem um pólo para $S = -\tau^{-1} = -\omega_c$ e um zero na origem, i.e. em $S = 0$. A representação no plano de Argand das singularidades do filtro activo passa-alto é assim igual à obtida no filtro passivo.

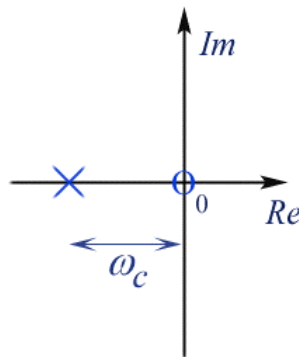


Figura 26. Representação no plano de Argand, das singularidades do filtro activo-RC passa-alto de primeira ordem.

O ganho estático e o ganho quando $S \rightarrow \infty$ são dados pelas seguintes equações:

$$T(S=0) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 0 \quad T(S \rightarrow \infty) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{S\tau}{S\tau + 1} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Note-se que a impedância equivalente do condensador tende para zero quando S tende para infinito, e portanto, que para altas frequências o circuito se reduz a uma montagem inversora, assim é natural que o ganho do filtro quando $S \rightarrow \infty$ coincida com o ganho da montagem inversora. O diagrama de Bode é representado na seguinte figura.

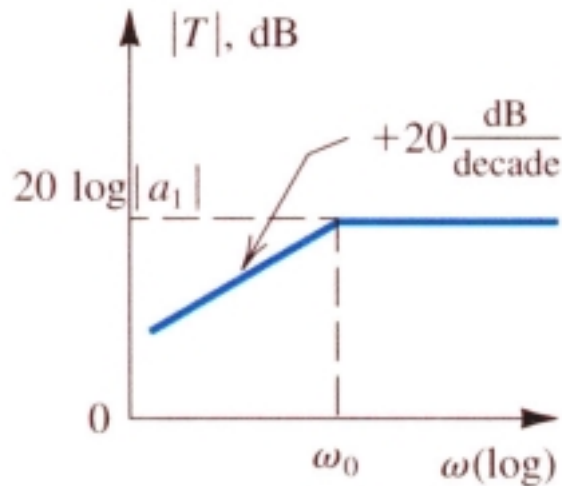


Figura 27. Diagrama de Bode do filtro activo-RC passa-alto de primeira ordem.

Novamente, o valor máximo do diagrama de amplitude é $20 \cdot \log_{10}(R_2/R_1)$, e o diagrama de fase está deslocado 180° relativamente ao que foi obtido para o filtro passivo equivalente. Estas diferenças são equivalentes às observadas entre o filtro passivo passa-baixo e o filtro activo-RC passa-baixo.

Resposta ao escalão de um filtro activo-RC passa-alto de 1ª ordem

A análise do comportamento do filtro activo-RC passa-alto no domínio do tempo, quando à entrada é introduzido um escalão unitário, resulta da aplicação das leis malhas e dos nós ao circuito anterior, da qual se obtém a seguinte equação diferencial:

$$\frac{v_i(t) - v_c(t)}{R_1} = C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \Rightarrow v_c(t) + R_1 C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = v_i(t)$$

De notar que a tensão de saída do filtro é dada por

$$v_o(t) = -R_2 C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t}$$

A solução da equação homogénia e a solução do regime forçado da equação diferencial são dadas respectivamente por:

$$v_c(t) = A \cdot \ell^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad \text{e} \quad v_c(t) = u(t)$$

A tensão aos terminais do condensador é dada pela seguinte equação,

$$v_c(t) = \begin{cases} A \cdot \ell^{-\frac{t}{R_1 C}} + 1 & \Leftarrow t \geq 0 \\ 0 & \Leftarrow t < 0 \end{cases}$$

em que a constante A é imposta pela continuidade da tensão aos terminais do condensador no instante inicial, que implica que

$$v_c(0) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot \ell^0 + 1 \Rightarrow A = -1,$$

pelo que a evolução temporal da tensão no condensador, tem a seguinte expressão

$$v_c(t) = \left(1 - \ell^{-\frac{t}{R_1 C}} \right) \cdot u(t),$$

da qual resulta que a expressão da evolução temporal da tensão de saída é dada por

$$v_o(t) = -R_2 C \cdot \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = -R_2 C \cdot \frac{\left(\ell^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)}{R_1 C} \cdot u(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\ell^{-\frac{t}{R_1 C}} \right) \cdot u(t)$$

que é ilustrada na figura seguinte.

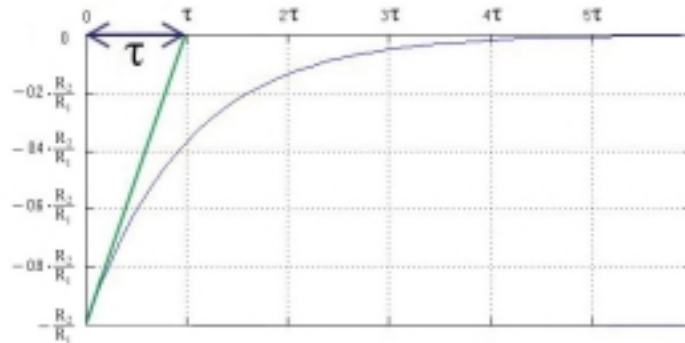


Figura 28. Resposta ao escalão unitário de um filtro activo-RC passa-alto de primeira ordem.

Os valores correspondentes ao tempo de descarga do sinal de saída até estar a 5% e 1% do valor inicial, continuam a ser dados por $t = 3\tau$ e $t = 5\tau$.

$$\frac{v_o(3\tau)}{v_o(0)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\ell^{-\frac{3R_1 C}{R_1 C}} \right)}{-\frac{R_2}{R_1}} \cong 0.05, \quad \frac{v_o(5\tau)}{v_o(0)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\ell^{-\frac{5R_1 C}{R_1 C}} \right)}{-\frac{R_2}{R_1}} \cong 0.01$$

Da aplicação dos teoremas do valor inicial e do valor final resulta que:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} T(S) = A \cdot \frac{S\tau}{S\tau + 1} = A \iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = A \Rightarrow v_o(0) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_i(0)$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} T(S) = A \cdot \frac{S\tau}{S\tau + 1} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = 0 \Rightarrow v_o(\infty) = 0$$