

Capítulo III

Parâmetros e Propriedades Fundamentais de uma Antena

1 Introdução

Para descrever quantitativamente a performance de uma antena, é necessário definir os parâmetros e propriedades fundamentais da mesma. Alguns dos parâmetros e propriedades são interrelacionados, de modo que nem todos necessitam ser especificados para a caracterizar completamente a performance operacional da antena.

2 Polarização

Em termos simples, a polarização de uma antena define a direção do vetor \underline{E} do campo eletromagnético por ela irradiado com relação a um plano de referência. Na grande maioria das situações o plano de referência é a superfície terrestre. A forma mais geral de polarização é a denominada **Polarização Elíptica**, quando o vetor \underline{E} gira em um plano perpendicular à direção de propagação da onda eletromagnética, conforme mostra a Figura 1.

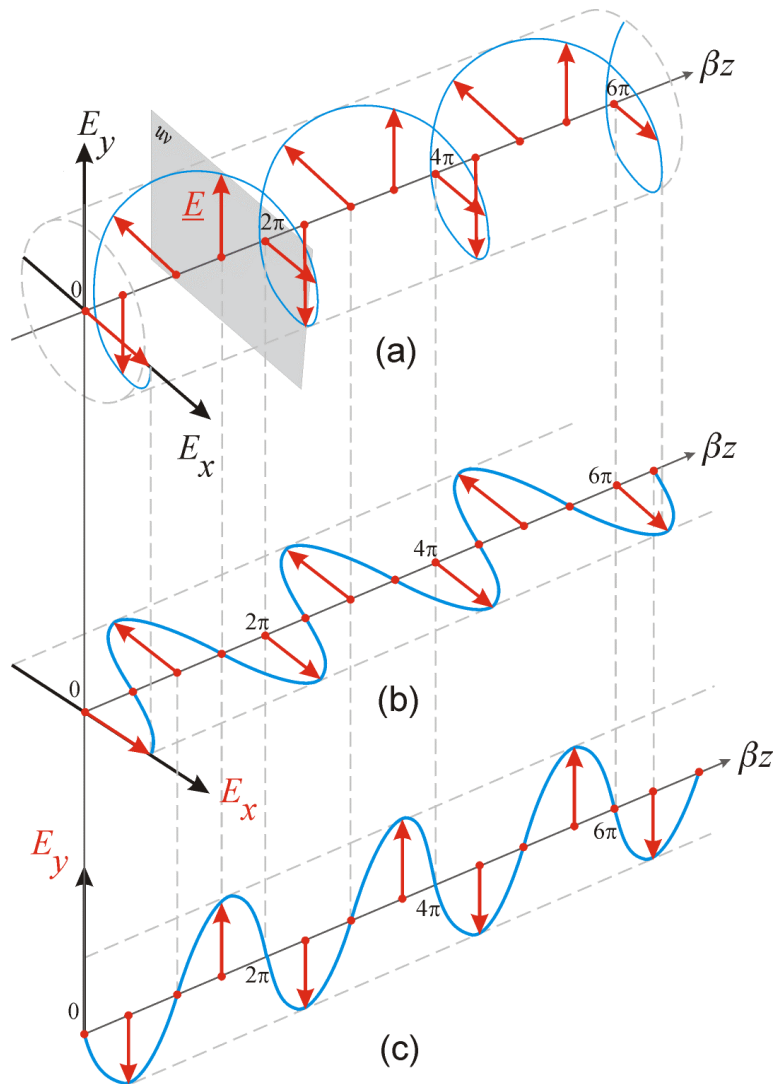


Figura 1: (a) Onda eletromagnética com polarização elíptica. A onda propaga-se na direção z e o vetor \underline{E} (vermelho) descreve uma hélice de seção transversal elíptica (azul). No plano uv , localizado em uma determinada posição do eixo z e perpendicular ao mesmo, o vetor \underline{E} descreve uma elipse (ver Figura 2) à medida que uv é deslocado ao longo de z . Quando a seção transversal da hélice descrita por \underline{E} é um círculo a polarização é denominada **Polarização Circular**. (b) **Polarização Linear Horizontal**, que é um caso particular de (a). (c) **Polarização Linear Vertical**, que é um outro caso particular de (a).

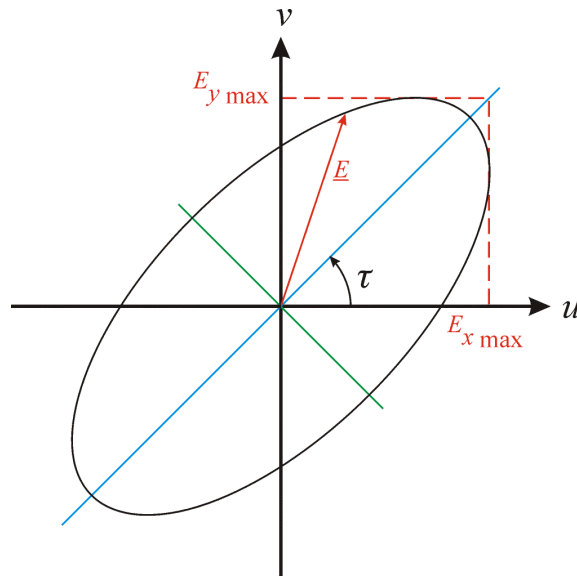


Figura 2: Plano uv mostrado na Figura 1.

A onda mostrada na Figura 1(a) possui polarização elíptica, sendo adicionalmente caracterizada como **Polarização Direita**. Isto porque a **regra da mão direita** (ver Capítulo I) é aplicável para descrever o sentido de giro de \underline{E} ao alinharmos o polegar com o sentido de propagação da onda. Quando o mesmo procedimento é aplicável mas com a mão esquerda, então a polarização é denominada de **Polarização Esquerda**.

Todas as demais formas de polarização possíveis para uma antena são casos particulares da polarização elíptica, como mostrado, por exemplo, nas Figuras 1(b) e 1(c).

Para um irradiador genérico referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , o plano uv de giro do vetor \underline{E} é tangente à superfície esférica de raio r sobre a qual encontra-se o ponto onde deseja-se determinar \underline{E} :

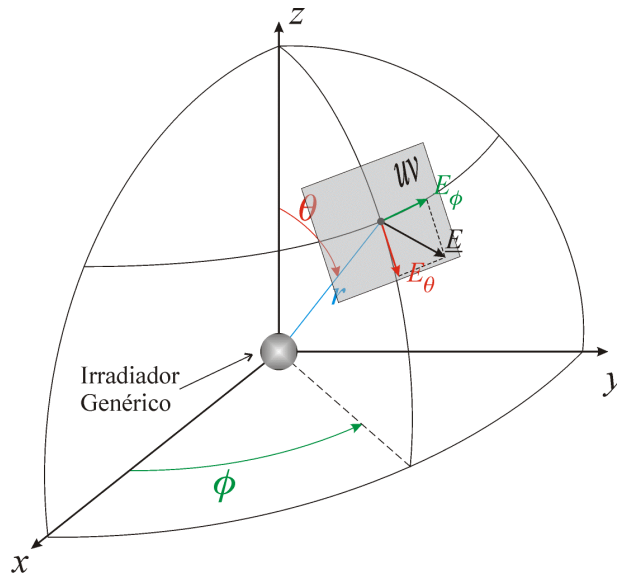


Figura 3: Plano uv para um irradiador genérico referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) .

O vetor \underline{E} nas Figuras 3 e 4 pode ser expresso por:

$$\underline{E} = \hat{\theta} E_{\theta \max} \cos(\omega t) + \hat{\phi} E_{\phi \max} \cos(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

onde α é a diferença de fase **no tempo** entre E_{θ} e E_{ϕ} , $-\pi < \alpha \leq \pi$. Sejam u e v coordenadas definidas ao longo dos eixos cartesianos gerados pelos vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ tal que:

$$u = E_{\theta \max} \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$v = E_{\phi \max} \cos(\omega t + \alpha) = E_{\phi \max} [\cos(\omega t)\cos(\alpha) - \text{sen}(\omega t)\text{sen}(\alpha)] \quad (3)$$

De (2) temos

$$\left(\frac{u}{E_{\theta \max}}\right)^2 = \cos^2(\omega t) = 1 - \text{sen}^2(\omega t) \rightarrow \text{sen}(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{E_{\theta \max}}\right)^2} \quad (4)$$

$$u = E_{\theta \max} \cos(\omega t) \rightarrow \cos(\omega t) = \frac{u}{E_{\theta \max}} \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (3) eliminamos a dependência da variável t , resultando em:

$$\frac{u^2}{E_{\theta \max}^2} - \frac{2uv \cos(\alpha)}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}} + \frac{v^2}{E_{\phi \max}^2} - \text{sen}^2(\alpha) = 0 \quad (6)$$

Mas, a equação geral de uma elipse é dada por:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0 \quad (7)$$

$$B^2 - 4AC < 0$$

Comparando (7) com (6) temos:

$$A = \frac{1}{E_{\theta \max}^2}$$

$$B = \frac{-2\cos(\alpha)}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}}$$

$$C = \frac{1}{E_{\phi \max}^2}$$

$$D = E = 0$$

$$F = -\text{sen}^2(\alpha) \quad (8)$$

$$B^2 - 4AC = \frac{4}{E_{\theta \max}^2 E_{\phi \max}^2} (\cos^2(\alpha) - 1) < 0 \text{ p/ } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq \pi$$

Portanto (6) representa uma elipse no plano uv dos vetores $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$. O centro da elipse está no centro do plano uv e o eixo maior inclinado em relação ao eixo u de um ângulo τ (ver Figura 4) dado por:

$$\tau = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2E_{\theta \max} E_{\phi \max} \cos(\alpha)}{E_{\theta \max}^2 - E_{\phi \max}^2} \right) \quad (9)$$

Note de (9) que se $E_{\theta \max} = E_{\phi \max}$ então $\tau = \frac{1}{2} \arctan(\infty) = 45^\circ$.

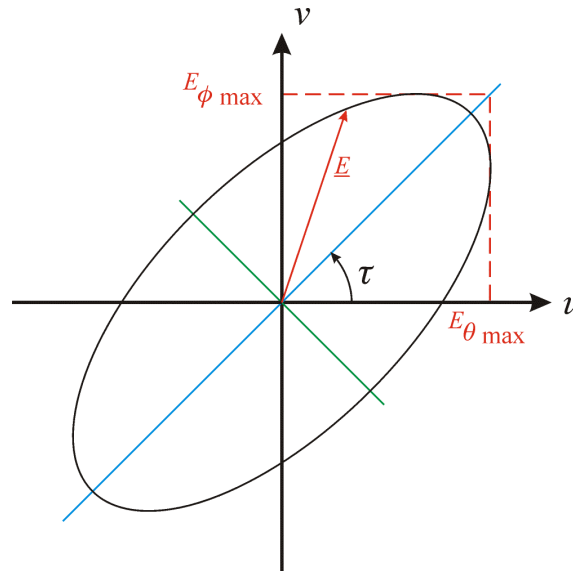


Figura 4: Plano uv mostrado na Figura 3.

- (I) Quando as componentes E_θ e E_ϕ do campo elétrico \underline{E} estão **oscilando em fase no tempo** ($\alpha = 0$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta \max}^2} - \frac{2uv}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}} + \frac{v^2}{E_{\phi \max}^2} = \left(\frac{u}{E_{\theta \max}} - \frac{v}{E_{\phi \max}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{u}{E_{\theta \max}} - \frac{v}{E_{\phi \max}} = 0 \quad (10)$$

- (II) Quando as componentes E_θ e E_ϕ do campo elétrico \underline{E} estão **oscilando em oposição de fase no tempo** ($\alpha = \pi$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta \max}^2} + \frac{2uv}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}} + \frac{v^2}{E_{\phi \max}^2} = \left(\frac{u}{E_{\theta \max}} + \frac{v}{E_{\phi \max}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{u}{E_{\theta \max}} + \frac{v}{E_{\phi \max}} = 0 \quad (11)$$

As equações (10) e (11) representam retas no plano uv definidas por

$$v = \left(\pm \frac{E_{\phi \max}}{E_{\theta \max}} \right) u \quad (12)$$

significando que para $\alpha = 0$ e para $\alpha = \pi$ a onda eletromagnética possui **Polarização Linear**.

- (III) Quando as componentes E_θ e E_ϕ do campo elétrico \underline{E} estão **oscilando em quadratura de fase no tempo** ($\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta \max}^2} + \frac{v^2}{E_{\phi \max}^2} = 1 \quad (13)$$

que é a equação de um círculo centrado na origem. Portanto este caso representa a situação de **Polarização Circular**.

- (IV) A situação intermediária entre **Polarização Linear** e **Polarização Circular** é representada para os demais valores do ângulo de fase α , situação que resultará em **Polarização Elíptica**.

● O sinal de α define o sentido das polarizações **Elíptica** e **Circular**. Para $\alpha < 0$ a onda apresenta **Polarização Direita** e para $\alpha > 0$ a onda apresenta **Polarização Esquerda**.

● Para o caso da **Polarização Linear**, é comum associar-se a orientação da antena em relação ao solo. Assim, por exemplo, um monopolo aterrado para radiodifusão apresenta **Polarização Vertical** porque o campo elétrico \underline{E} varia na direção vertical.

● É imperativo que a polarização da antena transmissora (TX) seja compatível com a polarização da antena receptora (RX), caso contrário, a antena RX captará pouco ou nenhum sinal da antena TX, mesmo quando relativamente próximas uma da outra. Esta seletividade resultante da polarização entre antena transmissora e receptora é freqüentemente utilizada para evitar interferências entre sistemas TX-RX próximos que operem na mesma freqüência.

● Na faixa de UHF e na faixa de microondas é comum utilizar polarização Circular Esquerda (Direita) entre antenas TX e RX, de modo que, ao ocorrer efeitos de *multipath* (reflexão em um plano condutor elétrico), o sinal refletido no plano inverte o sentido de polarização (devido ao efeito da “imagem espelhada” elétrica – Capítulo II – cancelamento da componente tangencial de \underline{E} na superfície plana condutora) e, assim, alcança a antena RX com polarização Direita (Esquerda). Uma vez que o raio refletido tem polarização não compatível com a polarização da antena RX, não ocorre interação entre raio refletido e raio direto, e, assim, não ocorre interferência intersimbólica para sistemas digitais nem cancelamento de sinal por oposição de fase para sistemas analógicos.

3 Padrão de Irradiação

O **Padrão de Irradiação** $F(\theta, \phi)$ de uma antena é a expressão analítica que define a intensidade normalizada do campo elétrico $E_\theta(\theta, \phi)$ resultante em cada ponto de uma superfície esférica Σ de raio $r = r_\Sigma$ em cujo centro encontra-se a antena:

$$F(\theta, \phi) = \frac{E_\theta(\theta, \phi)}{E_{\theta \max}} \quad (14)$$

onde $E_{\theta \max}$ é o valor máximo de $E_\theta(\theta, \phi)$ que ocorre para a particular direção $(\theta, \phi) = (\theta_{\max F}, \phi_{\max F})$ do espaço \mathcal{R}^3 , sendo $\theta_{\max F}$ e $\phi_{\max F}$ os valores de θ e ϕ que maximizam $E_\theta(\theta, \phi)$.

Note que o valor absoluto máximo de $F(\theta, \phi)$ é 1.0. O gráfico de $F(\theta, \phi)$ é denominado de **Diagrama de Irradiação**.

Exemplo 1: Determine o padrão de irradiação $F(\theta, \phi)$ de um Dipolo Curto para uma distância $r = r_{\Sigma}$ situada na Região de Campo Distante.

Solução: Vimos que para o Campo Distante de um Dipolo Curto vale a relação (Equação (52) do Capítulo II) vale a relação

$$E_{\theta}(\theta, \phi) = 60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen } \theta \quad (15)$$

Note que, para o Dipolo Curto, $E_{\theta}(\theta, \phi)$ não depende de ϕ .

De (15), observamos que para $\theta = \theta_{\max F} = 90^\circ$ ocorre o valor máximo de $E_{\theta}(\theta, \phi)$ que é

$$E_{\theta \max} = 60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen } 90^\circ = 60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \quad (16)$$

Substituindo (15) e (16) em (14) temos:

$$F(\theta, \phi) = \frac{E_{\theta}(\theta, \phi)}{E_{\theta \max}} = \frac{60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen } \theta}{60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})}} = \text{sen } \theta \quad (17)$$

O padrão de irradiação $F(\theta, \phi)$ é dado em Decibéis por

$$F(\theta, \phi)_{\text{dB}} = 20 \log |F(\theta, \phi)| \quad (18)$$

O **Padrão de Potência** de uma antena é definido como

$$P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2 \quad (19)$$

e é dado em Decibéis por

$$P(\theta, \phi)_{\text{dB}} = 10 \log |F(\theta, \phi)|^2 = 20 \log |F(\theta, \phi)| \quad (20)$$

Note de (18) e (20) que

$$P(\theta, \phi)_{\text{dB}} = F(\theta, \phi)_{\text{dB}} \quad (21)$$

4 Largura do Feixe

A Figura 5 mostra o diagrama de irradiação $F(\theta, \phi)_{dB}$ típico de uma **Antena Parabólica** (a ser estudada em capítulo posterior).

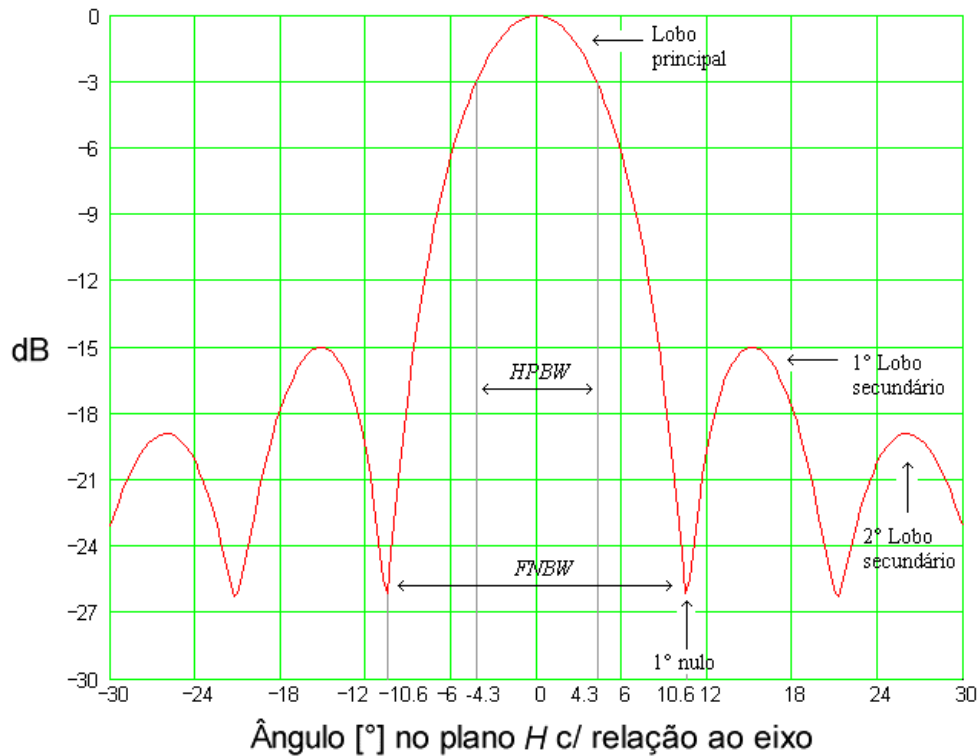


Figura 5: Diagrama de Irradiação $F(\theta, \phi)_{dB}$ de uma Antena Parabólica operando em 1GHz. O ângulo na abscissa do gráfico é o ângulo plano contido no plano H e é medido em relação ao eixo do refletor parabólico. O plano H é o plano no qual varia, em consequência da excitação senoidal na frequência de 1GHz, o vetor campo magnético \underline{H} do campo irradiado pela antena parabólica. O **Lobo Principal** contém a direção de máxima irradiação. Qualquer outro lobo que não seja o principal é denominado de **Lobo Secundário**.

Na Figura 5, $HPBW = 2 \times 4.3^\circ = 8.6^\circ$ é o *Half Power Beam Width*, isto é, a **Largura do Feixe** (*beam width*) com centro no máximo de $F(\theta, \phi)_{dB}$, largura para a qual a **potência irradiada cai à metade** (*half power*). Na literatura nacional o $HPBW$ é conhecido como AMP (Ângulo de Meia Potência).

$FNBW = 2 \times 10.6^\circ = 21.2^\circ$ é o *First Null Beam Width*, isto é, a **Largura do Feixe** (*beam width*) com centro no máximo de $F(\theta, \phi)_{dB}$, largura para a qual a potência irradiada cai ao seu primeiro valor mínimo (eventualmente nulo - *null*). Note na Figura 5 que outros nulos ocorrem além do 1º nulo.

Exemplo 2: Determine o $HPBW$ de um Dipolo Curto para uma distância $r = r_\Sigma$ situada na Região de Campo Distante.

Solução:

Para a potência cair a metade é necessário que o campo elétrico \underline{E} caia para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do seu valor máximo.

De (17), $F(\theta, \phi) = \sin \theta$ para o dipolo curto. Logo $\theta_{-3\text{dB}} = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$ é o ângulo plano contido no plano E , medido¹ acima e abaixo² da direção $(\theta, \phi) = (\theta_{\max F}, \phi_{\max F}) = (90^\circ, \forall \phi)$, ângulo para o qual a potência cai à metade. Assim, $HPBW = 2\theta_{-3\text{dB}} = 90^\circ$.

A Figura 6 mostra o gráfico tridimensional do Padrão de Potência $P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$ para o dipolo curto:

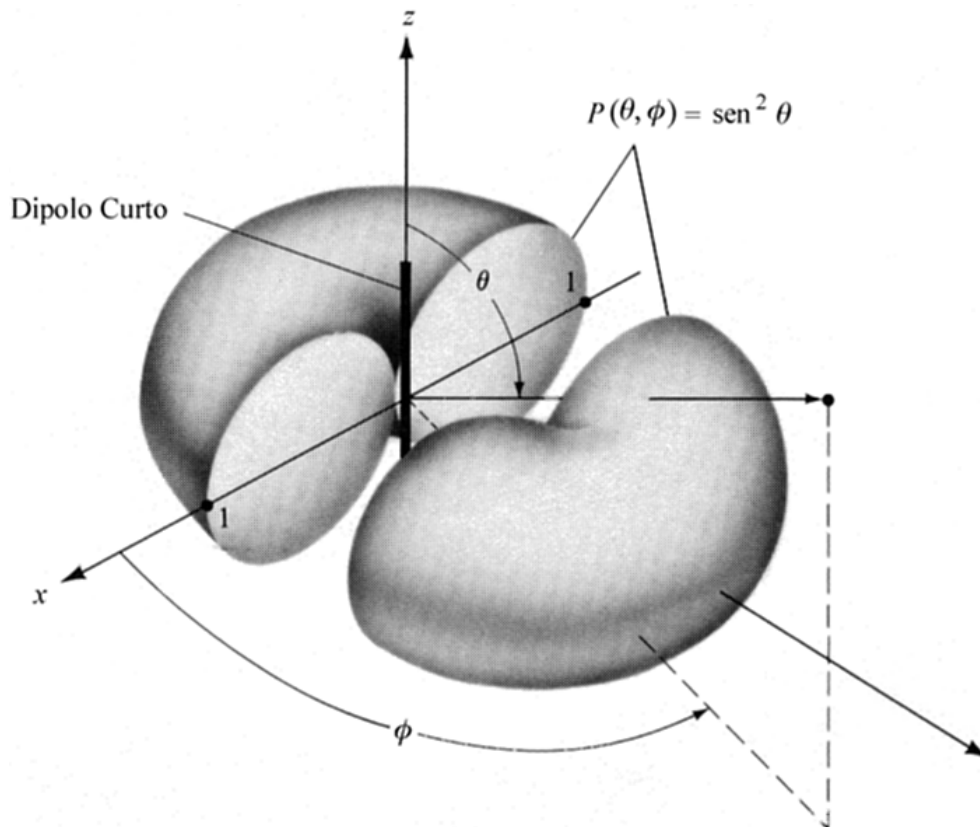


Figura 6: Gráfico de $P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$ para o dipolo curto.

Note que se o dipolo curto for gerado por efeito da imagem elétrica de um monopolo aterrado, como o mostrado na Figura 7, então $P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$ é válido para $0 < \theta \leq 90^\circ$. Isto significa que apenas a metade da superfície $P(\theta, \phi) = \sin^2 \theta$ acima do plano xy na Figura 6 deve ser considerada como representativa do Padrão de Potência $P(\theta, \phi)$ do monopolo aterrado.

¹ O plano E é o plano no qual varia, em consequência da excitação senoidal, o vetor campo elétrico \underline{E} do campo irradiado por uma antena. O plano H é o plano no qual varia, em consequência da excitação senoidal, o vetor campo magnético \underline{H} do campo irradiado por uma antena.

² Ou à esquerda e à direita se a polarização for horizontal, isto é, se o dipolo estiver paralelo ao solo.

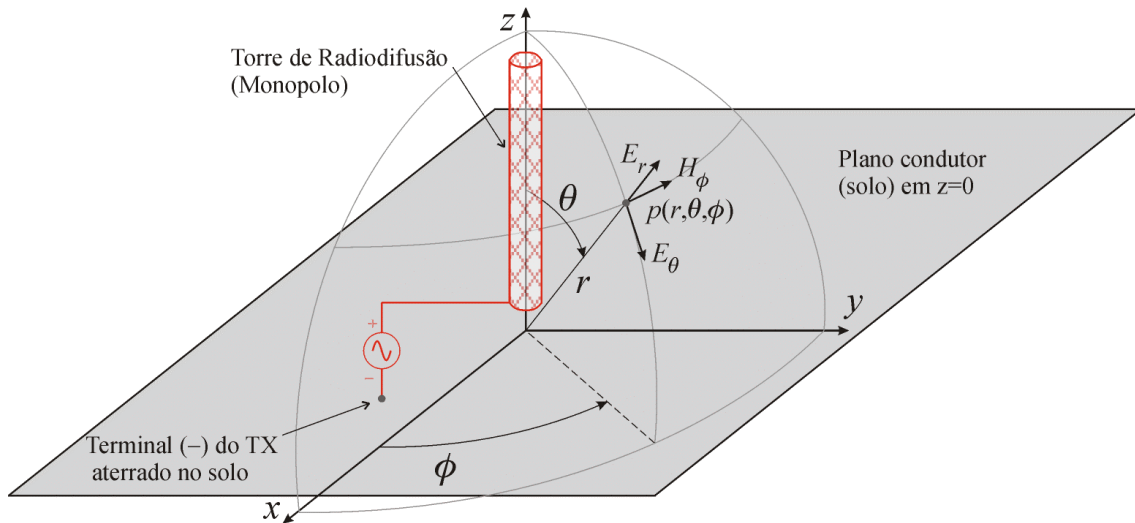


Figura 7: Monopolo aterrado utilizado em radiodifusão.

5 Intensidade de Radiação, Ângulo Sólido do Feixe, Diretividade e Ganho

Estes parâmetros de uma antena definem a capacidade de uma antena em concentrar a energia irradiada (ou recebida) em uma região do espaço \mathfrak{R}^3 . Diretividade, Ganho e Abertura Efetiva baseiam-se no conceito de **Ângulo Sólido**. O conceito de ângulo sólido pode ser melhor compreendido a partir do conceito de **Ângulo Plano**:

O comprimento ds [m] de um **arco** subtendido pelo **ângulo plano** $d\theta$ [rad] é $ds = r d\theta$ [m], conforme mostra a Figura 8:

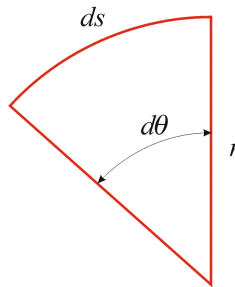


Figura 8: Comprimento $ds = r d\theta$ [m] de um **arco** subtendido pelo **ângulo plano** $d\theta$ [rad].

Portanto, o comprimento C de um círculo de raio r é dado pela soma de todos os arcos ds que formam o círculo:

$$C = \oint_{\text{círculo}} ds = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r d\theta = r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = r[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi r \text{ [m]} \quad (22)$$

ou, **uma vez que r é constante**, o comprimento C pode ser também dado pela soma de todos os **ângulos planos** $d\theta$ que formam o círculo:

$$C = \oint_{\text{circulo}} ds = r \int_{\theta \in [0, 2\pi]} d\theta = 2\pi r \text{ [m]} \quad (23)$$

De maneira análoga, a área dS [m²] da **superfície** subentendida pelo **ângulo sólido** $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$ [rad²] é $dS = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$ [m²]:

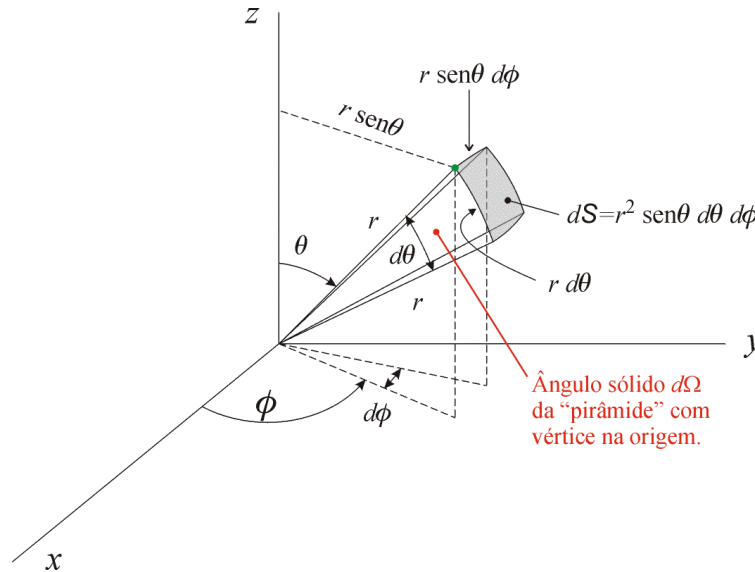


Figura 9: Área $dS = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$ [m²] da **superfície** subentendida pelo **ângulo sólido** $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$ [rad²].

Portanto, a área A de uma esfera de raio r é dada pela soma de todas as superfícies dS que formam a esfera:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\text{esfera}} dS = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi = r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} d\phi = \\ &= r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} [1 - (-1)] d\phi = 2r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = 2r^2 [\phi]_0^{2\pi} = 4\pi r^2 \text{ [m}^2\text{]} \end{aligned} \quad (24)$$

ou, **uma vez que r é constante**, a área A pode ser também dada pela soma de todos os **ângulos sólidos** $d\Omega$ que formam a esfera:

$$A = \iint_{\text{esfera}} dS = r^2 \iint_{\Omega \in [0, 4\pi]} d\Omega = 4\pi r^2 \text{ [m}^2\text{]} \quad (25)$$

Assim como o **ângulo plano** total que gera um **círculo** é 2π [rad], da mesma forma o **ângulo sólido** total que gera uma **esfera** é 4π [rad²] ou [sr] – *steradian*³.

A Figura 10 mostra um antena genérica localizada no centro de uma esfera de raio r , sendo P_a a potência fornecida pelo transmissor ao irradiador. Assumindo que não existam perdas no irradiador (eficiência 100%), a potência por ele irradiada também é P_a . O irradiador em questão não é isotrópico⁴ porque irradia de maneira não-uniforme, sendo a direção de maior irradiação $(\theta_{\max F}, \phi_{\max F}) = (90^\circ, 90^\circ)$, conforme mostrado pela região de maior iluminação na Figura 10.

O **Vetor de Poynting Médio** $\underline{S}(\theta, \phi) = \text{Re}\{\underline{\tilde{S}}(\theta, \phi)\} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ mostrado na Figura 10 (equações (56) a (58) do Capítulo II) mede a densidade superficial da potência total que **flui para fora** da superfície da esfera de raio r em um ponto p de coordenadas (θ, ϕ) da mesma. Em outras palavras, $\underline{S}(\theta, \phi)$ mede a **densidade da potência irradiada pela antena** em um ponto p do espaço \mathcal{R}^3 distante r do irradiador. Note que $\underline{S}(\theta, \phi)$ é máximo na região de máxima iluminação na Figura 10, a qual corresponde à direção $(\theta_{\max F}, \phi_{\max F}) = (90^\circ, 90^\circ)$.

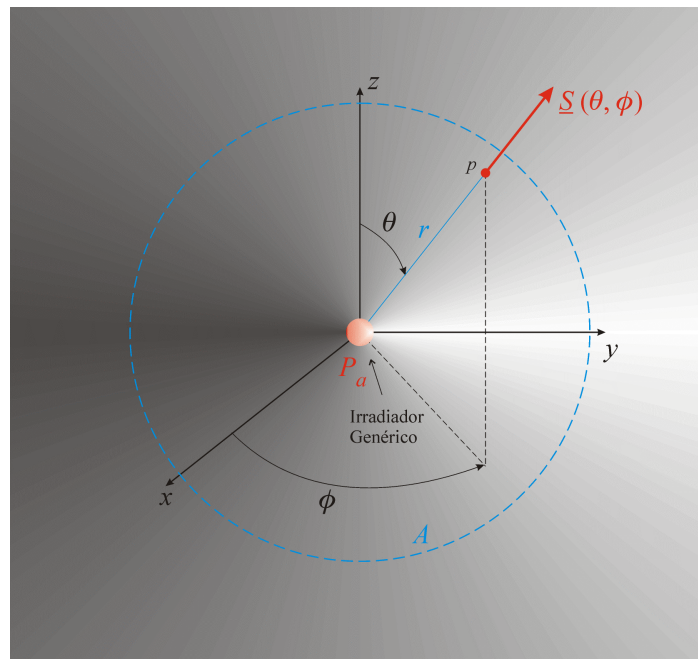


Figura 10: Irradiador não isotrópico sem perdas, alimentado por uma potência P_a , e o conseqüente Vetor de Poynting Médio $\underline{S}(\theta, \phi) \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ resultante em um ponto p do espaço \mathcal{R}^3 .

³ A tradução do inglês para o português da unidade *steradian* é estereoradiano e têm origem na palavra grega *stereos*, que significa “sólido”.

⁴ Um irradiador é isotrópico quando irradia com a mesma densidade superficial de potência para todas as possíveis direções do espaço \mathcal{R}^3 .

Pelo Teorema da Conservação da Energia, na Região de Campo Distante ($r \gg \lambda$), a soma de todos os Vetores de Poynting $\underline{S}(\theta, \phi)$ sobre a superfície esférica de área A deve obrigatoriamente ser igual à potência P_a irradiada pela antena, de modo que, com $d\underline{S}$ definido pela Figura 9 temos:

$$\begin{aligned} P_a &= \iint_{\text{esfera}} \underline{S}(\theta, \phi) \cdot d\underline{S} = \iint_{\text{esfera}} \hat{r} S(\theta, \phi) \cdot \hat{r} d\underline{S} = \hat{r} \cdot \hat{r} \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) d\underline{S} = \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) d\underline{S} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad [W] \end{aligned} \quad (26)$$

Mas, **considerando que**

- (I) \underline{E} e \underline{H} são sempre ortogonais entre si (ver Capítulo I) tal que em cada ponto p do espaço \mathfrak{R}^3 temos $\underline{E} = \hat{a}_E E = \hat{a}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)}$ e $\underline{H} = \hat{a}_H H = \hat{a}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}$, sendo \hat{a}_E e \hat{a}_H os vetores unitários que definem as direções de referência para \underline{E} e \underline{H} em \mathfrak{R}^3 e E_0 e H_0 são os valores instantâneos máximos de \underline{E} e \underline{H} em p .
- (II) \underline{E} e \underline{H} estão contidos em um plano perpendicular à direção \hat{r} de irradiação (propagação).

então a potência P_a irradiada pela antena pode ser escrita especificamente como (ver Equação (56) do Capítulo II):

$$\begin{aligned} P_a &= \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\{\underline{S}(\theta, \phi)\} \cdot d\underline{S} = \\ &= \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^*\right\} \cdot d\underline{S} = \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{\hat{a}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \times [\hat{a}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}]^*\right\} \cdot d\underline{S} = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{\hat{a}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \times [\hat{a}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}]^*\right\} \cdot \hat{r} d\underline{S} = \\ &= \frac{1}{2} (\hat{a}_E \times \hat{a}_H) \cdot \hat{r} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} [H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}]^*\right\} d\underline{S} = \\ &= \frac{1}{2} \hat{r} \cdot \hat{r} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} [H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}]^*\right\} d\underline{S} = \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} [H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}]^*\right\} d\underline{S} = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} H_0 e^{-j(\omega t + \angle H)}\right\} d\underline{S} = \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\left\{E_0 H_0 e^{j(\angle E - \angle H)}\right\} d\underline{S} \end{aligned} \quad (27)$$

Mas, no Campo Distante de qualquer irradiador temos que $\angle E = \angle H$, daí (27) torna-se

$$P_a = \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) \cdot d\underline{S} = \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} \text{Re}\{E_0 H_0\} d\underline{S} = \frac{1}{2} \iint_{\text{esfera}} E_0 H_0 d\underline{S} = \iint_{\text{esfera}} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} d\underline{S} \quad (28)$$

Mas, de (26), temos que

$$P_a = \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) d\underline{S} \quad (29)$$

Comparando (29) com (28), para um ponto p do espaço \mathfrak{R}^3 distante r do irradiador e situado na Região de Campo Distante nas coordenadas (r, θ, ϕ) , temos que

$$S(\theta, \phi) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (30)$$

onde E_0 e H_0 são os valores instantâneos máximos de \underline{E} e \underline{H} em p . Uma vez que r é fixo (a superfície é uma esfera de raio r), é conveniente explicitar apenas as coordenadas (θ, ϕ) em (30), e simultaneamente aplicar o conceito de impedância $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \text{ } [\Omega]$ do espaço livre:

$$\begin{aligned} S(\theta, \phi) &= \frac{E_0(\theta, \phi)}{\sqrt{2}} \frac{H_0(\theta, \phi)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} E_0(\theta, \phi) H_0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} E_0(\theta, \phi) \frac{E_0(\theta, \phi)}{Z_0} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{Z_0} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} S(\theta, \phi) &= \frac{E_0(\theta, \phi)}{\sqrt{2}} \frac{H_0(\theta, \phi)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} E_0(\theta, \phi) H_0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} H_0(\theta, \phi) Z_0 E_0(\theta, \phi) = \\ &= \frac{1}{2} H_0^2(\theta, \phi) Z_0 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

A Equação (33) mostra o resultado da análise dimensional de (26). Em (33) as unidades dimensionais encontram-se entre colchetes $[\cdot]$ e as respectivas grandezas entre encontram-se entre chaves $\{\cdot\}$:

$$\mathbf{P}_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \{S(\theta, \phi)r^2\} \left[\frac{\text{W}}{\text{rad}^2} \right] \{\text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi\} \left[\text{rad}^2 \right] \quad [\text{W}] \quad (33)$$

O termo $\{S(\theta, \phi)r^2\} \left[\frac{\text{W}}{\text{rad}^2} \right]$ é denominado de **Intensidade de Radiação** e mede a **potência irradiada pela antena por unidade de ângulo sólido** ou a **densidade sólido-angular de potência irradiada**.

Assim, a Intensidade de Radiação $U(\theta, \phi)$ de uma antena é dada por:

$$U(\theta, \phi) = S(\theta, \phi)r^2 \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right] \quad (34)$$

Já discutimos no Capítulo II que qualquer irradiador pode ser decomposto em uma infinidade de dipolos curtos, e, que para a Região de Campo Distante, os campos \underline{E} e \underline{H} gerados por um dipolo curto variam com o inverso da distância r , conforme demonstrado pelas equações (II) e (III) da Tabela 2 do Capítulo 2, a seguir repetidas:

$$E_{\theta} = \frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2 \epsilon_0 c \lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (35)$$

$$H_{\phi} = \frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2 \lambda r} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (36)$$

Substituindo (35) em (31), temos:

$$\begin{aligned} S(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{Z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 \ell \sin \theta}{2 \epsilon_0 c \lambda r} \right)^2 = \left(\frac{Z_0 I_0 \ell \sin \theta}{2 \lambda r} \right)^2 = \left(\frac{Z_0^2 I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{4 \lambda^2 r^2} \right) = \\ &= \frac{Z_0 I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8 \lambda^2 r^2} = \frac{Z_0 I_0^2 \sin^2 \theta}{8} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (34):

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= S(\theta, \phi) r^2 = \frac{Z_0 I_0^2 \sin^2 \theta}{8} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} r^2 = \\ &= \frac{Z_0 I_0^2 \sin^2 \theta}{8} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Portanto, potência irradiada por unidade de ângulo sólido $U(\theta, \phi)$, isto é, a Intensidade de Radiação, **é independente da distância r na Região de Campo Distante de um irradiador.**

Observe que normalizando a Intensidade de Radiação $U(\theta, \phi)$ pelo seu valor máximo U_{\max} obtemos, com base em (31), o Padrão de Potência $P(\theta, \phi)$ do irradiador, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\max}} &= \frac{S(\theta, \phi) r^2}{S_{\max}(\theta_{\max U}, \phi_{\max U}) r^2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{Z_0}}{\frac{1}{2} \frac{E_{\max}^2(\theta_{\max U}, \phi_{\max U})}{Z_0}} = \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{E_{\max}^2(\theta_{\max U}, \phi_{\max U})} = \\ &= \left(\frac{E_0(\theta, \phi)}{E_{\max}(\theta_{\max E}, \phi_{\max E})} \right)^2 = (F(\theta, \phi))^2 = P(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (39)$$

Em geral a superfície que representa o Padrão de Potência $P(\theta, \phi)$ de um irradiador em \mathfrak{R}^3 nem sempre é uma superfície simples como aquela mostrada na Figura 6. A Figura 11 mostra a superfície $P(\theta, \phi)$ típica para um irradiador com $(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) = (0^\circ, \forall \phi)$.

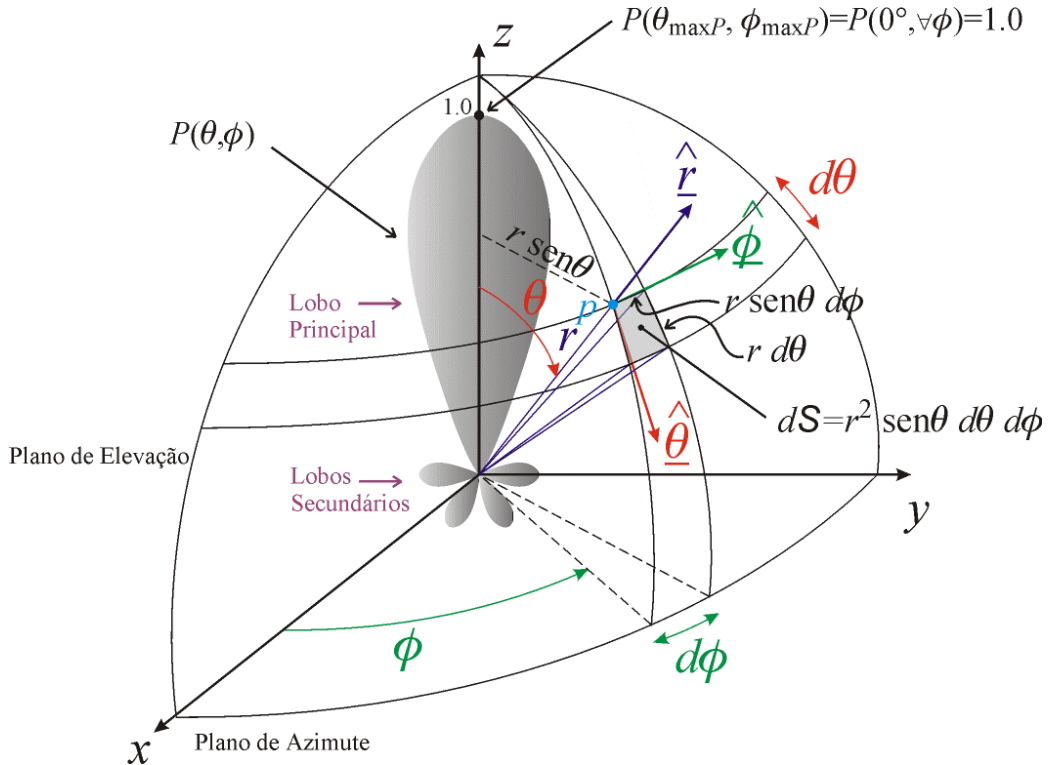


Figura 11: Padrão de Potência $P(\theta, \phi)$ típico de um irradiador de alta Diretividade (conceito a ser definido logo a seguir). Observe a existência de lobos secundários além do lobo principal alinhado com o eixo z .

O **Ângulo Sólido do Feixe** de irradiação Ω_a representa o quanto a potência P_a irradiada por uma antena “cabe angularmente” dentro de um cone de abertura Ω_a com densidade sólido-angular de potência irradiada constante U_{\max} , cone cujo vértice está na origem do sistema (r, θ, ϕ) e cujo eixo alinha-se com a direção de U_{\max} .

Para entendermos este conceito, vamos partir da Equação (26), aqui repetida por comodidade de visualização:

$$\begin{aligned}
 P_a &= \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{esfera}} \hat{r} S(\theta, \phi) \cdot \hat{r} dS = \hat{r} \cdot \hat{r} \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) dS = \iint_{\text{esfera}} S(\theta, \phi) dS \\
 &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad [\text{W}]
 \end{aligned} \tag{26}$$

Substituindo a Intensidade de Radiação $U(\theta, \phi) = S(\theta, \phi) r^2 \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$, obtido de (34), em (26) resulta:

$$P_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad [\text{W}] \tag{40}$$

Mas, de (39), $U(\theta, \phi) = P(\theta, \phi)U_{\max}$. Daí, substituindo em (40), temos:

$$P_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta, \phi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi)U_{\max} \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{W}] \quad (41)$$

Mas (41) pode ser re-escrita como

$$\frac{P_a}{U_{\max}} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{sr}] \quad (= [\text{rad}^2]) \quad (42)$$

O termo $\frac{P_a}{U_{\max}}$ em (42) tem unidade dimensional $[\text{rad}^2]$, e, portanto, representa um ângulo sólido Ω .

Especificamente, $\frac{P_a}{U_{\max}} = \Omega_a$ representa o quanto a potência P_a irradiada pela antena “cabe angularmente” dentro de um cone de abertura Ω_a com densidade sólido-angular de potência irradiada constante U_{\max} , cone cujo vértice está na origem do sistema (r, θ, ϕ) .

Em outras palavras, $\frac{P_a}{U_{\max}}$ expressa o ângulo sólido Ω_a de abertura do cone Ψ , de vértice na origem e eixo alinhado com $(\theta, \phi) = (\theta_{\max U}, \phi_{\max U})$, ângulo Ω_a necessário para que toda a potência P_a gerada pela antena transmissora seja irradiada no espaço \mathfrak{R}^3 confinada dentro do cone Ψ com densidade sólido-angular de potência constante e igual a U_{\max} .

Assim, o **Ângulo Sólido do Feixe** de irradiação Ω_a de uma antena é dado por

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{rad}^2] \quad (43)$$

onde $P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$ é definido em (19).

Alternativamente, de modo análogo ao cômputo de (25), efetuando (43) em termos da soma de todos os ângulos sólidos $d\Omega$ que formam uma esfera em torno da antena temos:

$$\Omega_a = \iint_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega \quad [\text{rad}^2] \quad (44)$$

Para antenas de alta diretividade com simetria aproximadamente radial do Padrão de Potência $P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$ em torno do eixo que aponta na direção $(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})$, como é o caso de muitas Antenas Parabólicas, o Ângulo Sólido do Feixe Ω_a pode ser aproximado pelo quadrado do Ângulo de Meia Potência *HPBW*, conforme mostra a Figura 12:

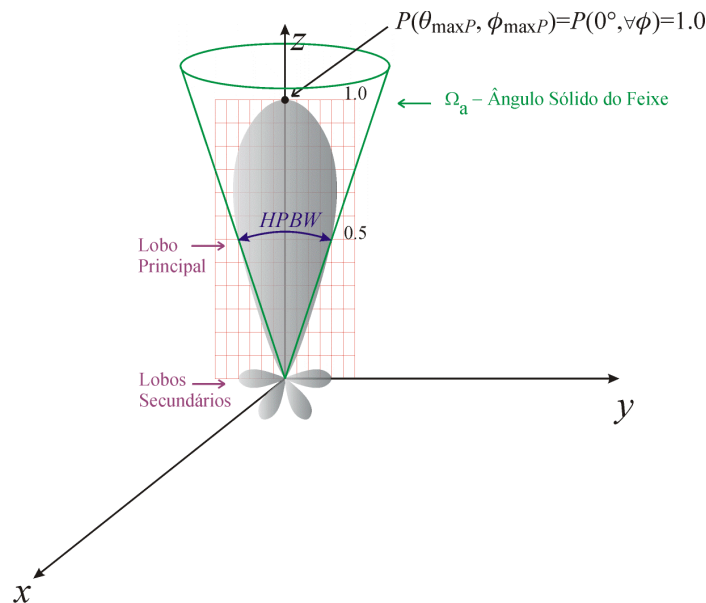


Figura 12: Aproximação do Ângulo Sólido do Feixe Ω_a pelo Ângulo de Meia Potência $HPBW$ através de $\Omega_a \approx HPBW^2$.

Diretividade é um índice numérico que mede a habilidade de uma antena em concentrar a potência irradiada na direção de máxima irradiação $(\theta, \phi) = (\theta_{\max U}, \phi_{\max U})$ (ou concentrar a absorção de potência incidente na direção $(\theta, \phi) = (\theta_{\max U}, \phi_{\max U})$ para o caso de antenas receptoras).

Especificamente, a Diretividade D de uma antena mede até que ponto uma antena é capaz de concentrar energia dentro de um ângulo sólido. Quando menor o ângulo sólido do cone dentro do qual a antena é capaz de concentrar a energia irradiada, maior a Diretividade D . Este conceito pode ser matematicamente expresso por:

$$D = \frac{U_{\max}}{U_{\text{med}}} \quad (45)$$

onde :

- (I) U_{\max} é o valor máximo da densidade angular de potência irradiada $U(\theta, \phi) \left[\frac{W}{\text{sr}} \right]$ que ocorre em $(\theta, \phi) = (\theta_{\max U}, \phi_{\max U})$. Ou seja, U_{\max} é o valor máximo da Intensidade de Radiação da antena.
- (II) U_{med} é a densidade angular de potência irradiada caso a potência P_a entregue à antena (aqui assumida ter 100% de eficiência) fosse uniformemente irradiada em todas as possíveis direções do espaço \mathcal{R}^3 , isto é, caso a potência P_a fosse irradiada com densidade de potência constante através da superfície de uma esfera de área $4\pi r^2$ em cujo centro encontra-se a antena. Ou seja, U_{med} é a Intensidade de Radiação resultante de um **Irradiador Isotrópico** alimentado pela mesma potência P_a entregue à antena em (I), ambas situadas nas mesmas coordenadas no espaço \mathcal{R}^3 .

Utilizando (34), (26) e (39), isto é,

- $U(\theta, \phi) = S(\theta, \phi) r^2 \left[\frac{W}{sr} \right]$
- $P_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad [W]$
- $\frac{U(\theta, \phi)}{U_{\max}} = P(\theta, \phi)$

a definição (45) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{U_{\max}}{U_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) r^2}{S_{\text{med}} r^2} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{S_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{P_a}{4\pi r^2}} = \\
 &= \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi r^2}} = \frac{r^2 S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \\
 &= \frac{U_{\max}}{\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{U_{\max}}{\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U_{\max} P(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} = \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}
 \end{aligned} \tag{46}$$

Substituindo (43) em (46):

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \Omega_a} = \frac{4\pi}{\Omega_a} \tag{47}$$

Portanto a **Diretividade** $D = 4\pi/\Omega_a$ de uma antena é a razão entre o ângulo sólido total de uma esfera (4π [sr]) pelo **Ângulo Sólido do Feixe** Ω_a da antena.

Observe que para um Irradiador Isotrópico a Diretividade resulta $D = 1$.

Nota: Antenas de alta diretividade em geral apresentam **lobo principal estreito** e **lobos secundários reduzidos**, como é o caso da Antena Parabólica. Nesta situação a **Diretividade** $D = 4\pi/\Omega_a$ pode ser determinada aproximando-se o **Ângulo Sólido do Feixe** Ω_a pelo produto dos **Ângulos de Meia Potência** $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$, relativos a dois planos ortogonais, cuja interseção é a direção de máxima radiação:

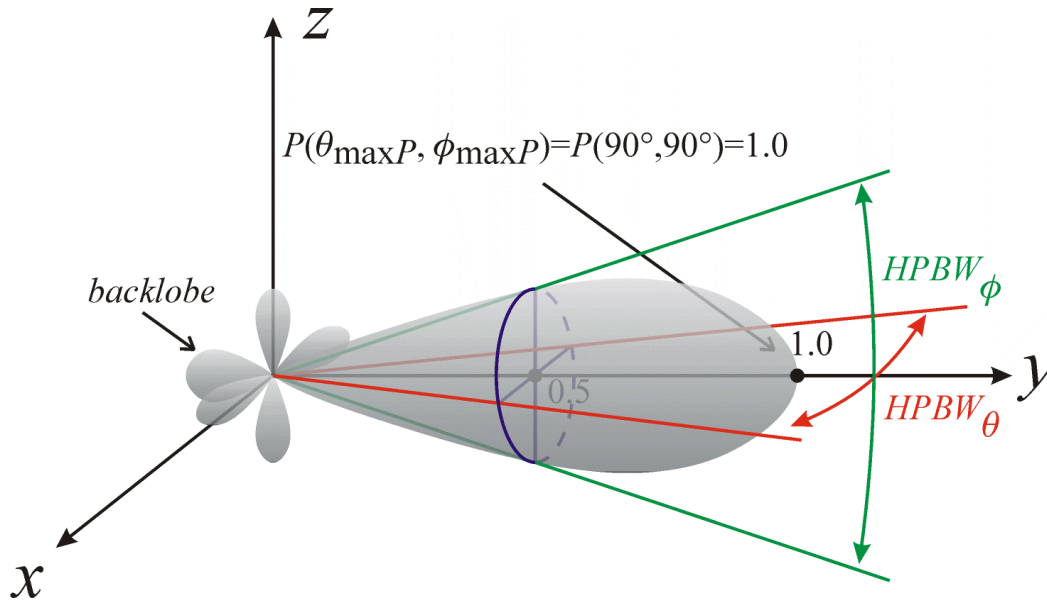


Figura 13: Aproximação da diretividade D pelo produto de $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$.

Portanto, para uma antena de alta diretividade é válida a seguinte relação, baseada na Figura 13:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_a} = \frac{4\pi}{HPBW_\theta HPBW_\phi} \quad (48)$$

Se os ângulos dos Ângulos de Meia Potência $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$ forem dados em graus $[\circ]$ converte-se o ângulo sólido 4π [sr] para graus:

$$4\pi \text{ [sr]} = 4\pi \text{ [rad}^2\text{]} = 4\pi \text{ [rad}^2\text{]} \times \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right)^2 \left[\frac{\circ}{\text{rad}}\right]^2 = \frac{4 \times 180^2}{\pi} [\circ]^2 = 41253 [\circ]^2$$

Portanto, para $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$ dados em $[\circ]$, (48) é re-escrita como

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_a} = \frac{41253 [\circ]^2}{HPBW_\theta HPBW_\phi} \quad (49)$$

O **Ganho de Potência** G de uma antena com perdas cuja potência **irradiada** é P_a é definido como a razão entre a máxima densidade superficial de potência irradiada $S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})$ pela antena e a densidade superficial de potência irradiada $S_{\text{med}} = \frac{P_e}{4\pi r^2}$ caso a antena fosse um irradiador isotrópico com 100% de eficiência **alimentado** por uma potência de entrada P_e :

$$G = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{P_e}{4\pi r^2}} \quad [\text{adimens.}] \quad (50)$$

Mas $\eta = P_a/P_e$ define a **eficiência** da antena não-isotrópica em questão, e daí temos que

$$G = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{(P_a/\eta)}{4\pi r^2}} = \eta \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{P_a}{4\pi r^2}} = \eta D \quad (51)$$

- Portanto, o Ganho de Potência G de uma antena será no máximo igual à sua diretividade D .
- $10 \log G$ define o parâmetro dB_i : ganho em dB de uma antena em relação ao irradiador isotrópico.
- Embora seja comum utilizar como referência o irradiador isotrópico, freqüentemente o Ganho de Potência G é calculado em relação ao Dipolo de Meia-Onda (a ser estudado em capítulo posterior) pelo fato de um irradiador isotrópico ser fisicamente irrealizável. Nesta situação o Ganho de Potência G é medido em dB_d .
- A **Relação Frente-Costas** de uma antena é definida como a razão entre o valor máximo da Intensidade Radiação $U_{\max} \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$ no lobo principal e o valor de $U(\theta, \phi) \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$ na direção (θ, ϕ) do maior lobo secundário situado no hemisfério **posterior** da antena (*major backlobe*). A relação frente costas deve ser superior a 25 dB para um bom funcionamento.

Exemplo 3: Calcule a diretividade D de um dipolo curto .

Solução:

$$D = 4\pi/\Omega_a \quad \text{sendo} \quad \Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \text{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{rad}^2].$$

Para o dipolo curto $P(\theta, \phi) = \text{sen}^2 \theta, \forall \phi$.

Daí,

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{sen}^3(\theta) \, d\theta \, d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \left[-\frac{1}{3} \text{sen}^2(\theta) \cdot \cos(\theta) - \frac{2}{3} \cos(\theta) \right]_0^\pi \, d\phi = \frac{4}{3} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = \frac{4}{3} [\phi]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3}$$

E, portanto,

$$D = \frac{4\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{2}$$

Ou seja, 1.5 vezes a diretividade de um irradiador isotrópico.

6 Impedância de Entrada

A Impedância de Entrada de uma antena é a impedância Z_A que a antena apresenta à linha de transmissão que a alimenta ou à estrutura de acoplamento que a une à linha de transmissão:

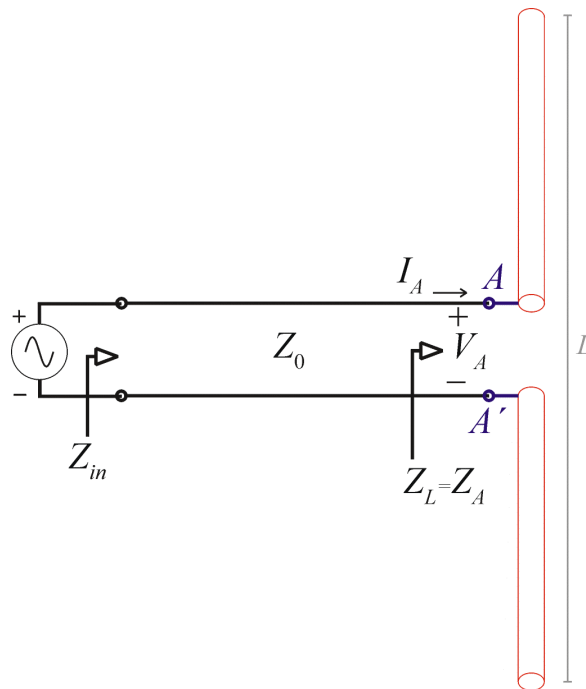


Figura 14: Antena Dipolo alimentada por uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 . A impedância de carga Z_L da linha de transmissão é a impedância Z_A "vista" nos terminais A e A' da antena.

Se

- (I) A **antena está isolada**, isto é, afastada de qualquer objeto eletricamente condutor e de tamanho físico comparável ao da antena,
- (II) A antena é **sem perdas**, isto é, uma antena construída por condutores de alta condutividade (cobre, por exemplo) e isoladores de material dielétrico de baixa tangente de perdas (poliestireno, por exemplo)

então sua impedância de entrada é igual a sua impedância própria referida aos terminais A e A' :

$$Z_A = \frac{V_A}{I_A} = R_A + jX_A \quad (52)$$

onde R_A é a **Resistência de Radiação** da antena e X_A é a **Reatância Própria** da antena, ambas referidas aos terminais A e A' .

- Quando existir qualquer objeto condutor elétrico de tamanho físico comparável ao da antena próximo a ela (uma outra antena, por exemplo), a impedância própria de entrada da antena é alterada pela proximidade do objeto de modo a incluir as contribuições devidas a impedância mútua entre antena e objeto. A impedância mútua resulta das correntes induzidas no objeto pela antena e vice-versa.

● Para uma **antena isolada e com perdas**, uma parte da potência P_A entregue à antena corresponde à potência irradiada P_r . Outra parte de P_A corresponde à potência P_p dissipada sob a forma de calor devido as perdas ôhmicas e dielétricas existentes na antena:

$$P_A = P_r + P_p = R_A \frac{I_{A(\max)}^2}{2} \quad (53)$$

onde $I_{A(\max)}$ é valor instantâneo máximo de I_A encontrado ao longo da antena. De (53) temos que

$$R_A = \frac{P_r}{\frac{I_{A(\max)}^2}{2}} + \frac{P_p}{\frac{I_{A(\max)}^2}{2}} = R_r + R_p \quad (54)$$

onde R_r é a resistência de radiação referida aos terminais A e A' e R_p é a resistência de perdas. Mas, a eficiência de uma antena é dada pela razão entre a potência irradiada e a potência total a ela entregue:

$$\eta = \frac{P_r}{P_A} \quad (55)$$

Daí,

$$\eta = \frac{P_r}{P_A} = \frac{P_r}{P_r + P_p} = \frac{R_r \frac{I_{A(\max)}^2}{2}}{R_r \frac{I_{A(\max)}^2}{2} + R_p \frac{I_{A(\max)}^2}{2}} = \frac{R_r}{R_r + R_p} \quad (56)$$

Exemplo 4: Um transmissor de rádio opera na frequência $f = 3.5$ MHz utilizando como antena um monopolo vertical aterrado de comprimento $L/2 = 4$ m construído com um fio de cobre de bitola 12AWG cuja resistência é $5 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ e diâmetro 2 mm. O fio de cobre é sustentado por um mastro vertical de poliestireno cujas perdas dielétricas podem ser consideradas desprezíveis. A resistência do aterramento é assumida ser de valor similar ao da resistência do fio do monopolo. Determine a eficiência deste monopolo sabendo que o *skin effect*⁵ altera a resistência DC de um fio de cobre de seção circular de acordo com

⁵O *skin effect* ou **Efeito Pelicular** é a tendência de as cargas elétricas movendo-se aceleradamente no interior de um condutor elétrico aglomerarem-se na “casca” externa do volume do condutor. O *skin effect* é um fenômeno de descrição matemática complexa que foge ao escopo deste texto. Um estudo quantitativo e formal do *skin effect* pode ser encontrado em S. Ramo, J.R. Whinnery & T. Van Duzer – *Campos e Ondas em Eletrônica das Comunicações* – Guanabara Dois, 1981. Alegoricamente e em palavras simples, o *skin effect* em um fio condutor consiste na repulsão e conseqüente dispersão das cargas elétricas no sentido radial do fio, repulsão radial que é originada pela compressão sofrida pelas cargas no sentido longitudinal por ação de seu movimento acelerado neste sentido. Quanto maior a frequência f da corrente elétrica que percorre o fio maior será a aceleração longitudinal experimentada pelas cargas. Quanto maior for a aceleração longitudinal maior será a compressão no sentido longitudinal aplicada sobre a nuvem de cargas. Em conseqüência, aumenta a força de repulsão radial entre as cargas na nuvem, e, portanto, ocorre a aglomeração das cargas na “casca” externa do volume do fio.

$$R_{(ac)}/R_{(dc)} \approx 3.8 \times 10^{-3} D \sqrt{f} + 0.26 \quad (57)$$

onde D é o diâmetro do fio em [mm] e f é a frequência da corrente que percorre o fio em [Hz].

Solução:

Uma vez que o tamanho do dipolo formado pelo monopolo em conjunto com sua imagem elétrica é $L = 2 \times 4\text{m} = 8\text{m}$ e uma vez que $\lambda = c/f = 85.7\text{ m}$, estamos diante de uma antena do tipo Dipolo Curto, porque $L < 0.1\lambda$.

A resistência DC representativa das perdas Joule é

$$R_{p(dc)} = 2 \cdot 4\text{m} \cdot 5 \times 10^{-3} \Omega/\text{m} = 40 \times 10^{-3} \Omega$$

De (57) temos

$$R_{(ac)}/R_{(dc)} \approx 3.8 \times 10^{-3} \cdot 2\text{mm} \cdot \sqrt{3.5 \times 10^6 \text{Hz}} + 0.26 = 14.5$$

logo

$$R_{p(ac)} = 14.5 \cdot R_{p(dc)} = 14.5 \cdot 40 \times 10^{-3} \Omega = 0.58 \Omega$$

Da Equação (62) do Capítulo II (um monopolo irradia em apenas um hemisfério, portanto sua resistência de radiação é metade da de um dipolo) temos

$$R_r = 40\pi^2 \left(\frac{L}{2\lambda} \right)^2 = 40\pi^2 \left(\frac{8\text{ m}}{2 \cdot 85.7\text{ m}} \right)^2 = 0.86 \Omega$$

E de (55)

$$\eta = \frac{P_r}{P_A} = \frac{R_r}{R_r + R_p} = \frac{0.86 \Omega}{0.86 \Omega + 0.58 \Omega} = 59.7\%$$

⇒ Portanto mais de 40% da potência entregue ao dipolo curto é **perdida em aquecimento do fio da antena!** Observe que **quanto menor o dipolo** menor será sua resistência de radiação e, assim, **menor será sua eficiência.**

● Vimos no Capítulo II que para determinar quantitativamente a componente resistiva R_A da impedância $Z_A = R_A + jX_A$ de uma antena basta a integração da parte real $\text{Re}\{\vec{S}\}$ do Vetor de Poynting Complexo \vec{S} sobre uma superfície esférica na Região de Campo distante. O método foi introduzido por H. C. Pocklington⁶ e baseia-se no fato de que, do Teorema da Conservação da Energia, a potência irradiada pela antena necessariamente é igual à potência total que atravessa a superfície esférica, e, desta condição, obtemos o valor de R_A .

● No entanto, para determinar quantitativamente a componente reativa X_A da impedância $Z_A = R_A + jX_A$ de uma antena é necessário a integração da parte imaginária de \vec{S} , isto é $\text{Im}\{\vec{S}\}$,

⁶ H. C. Pocklington, Electrical Oscillations in Wires, *Cambridge Philosophy Society Proc.*, 9, October 25, 1897, pp. 324-332.

sobre uma superfície Σ fechada que envolva o volume V da estrutura irradiante antena. Para que o resultado seja preciso, idealmente Σ deve estar separado de uma distância infinitesimal de V . Esta condição é necessária para que a energia reativa, máxima próxima à estrutura irradiante de volume V (região de Campo Próximo), possa ser “captada” pela “varredura superficial” efetuada pela integração de \vec{S} sobre Σ .

- Ocorre que para muitas formas geométricas de V , entre elas a geometria cilíndrica, a integração de \vec{S} sobre Σ não converge. O problema de ocorrência de singularidades na integração de \vec{S} foi contornado pelo Método da FEM Induzida, desenvolvido em 1922 independentemente por D.A. Rozhanski na então União Soviética e por L. Brillouin na França. O método foi introduzido em 1933 por J. Labus⁷, e posteriormente desenvolvido por S.A. Schelkunoff⁸. O Método da FEM Induzida indiretamente utiliza o princípio de que a reatância de uma antena origina-se da alta energia reativa (**ondas estacionárias \Leftrightarrow reflexão \Leftrightarrow re-irradiação**) no Campo Próximo, no entanto, a reatância é calculada a partir da energia re-irradiada por uma antena “virtual” ou “imaginária” nas proximidades da antena real. Daí então o nome do método.

- O Método da FEM Induzida foi um dos primeiros métodos efetivos para a determinação da componente reativa X_A da impedância $Z_A = R_A + jX_A$ de uma antena. Estudaremos o Método da FEM Induzida em capítulo posterior.

- Mais tarde, Schelkunoff desenvolveu o Método da Perturbação da Antena Bicônica⁹ para a determinação de $Z_A = R_A + jX_A$, interpretando uma antena dipolo formada por dois cones simétricos como uma linha de transmissão. Aplicando um fator de correção (denominado “perturbação”) aos resultados obtidos para a geometria cônica, Schelkunoff determinou com considerável precisão o valor de $Z_A = R_A + jX_A$ para antenas de geometria cilíndrica.

- Neste estudo adotaremos o Método da Perturbação da Antena Bicônica para efeito de determinação de $Z_A = R_A + jX_A$. Este método é mais preciso embora mais complexo que o Método da FEM Induzida. Não apresentaremos a sua dedução teórica neste texto, no entanto ele encontra-se implementado no programa Zi_CyDip.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 7) - Rev. 06/03/2002 - 328Kb (.zip)**.

- O Método da Perturbação da Antena Bicônica não é o método mais genérico e preciso para determinação de $Z_A = R_A + jX_A$. O Método da Antena Cilíndrica, formulado por L.V. King¹⁰ e desenvolvido por Erik Hallén¹¹, é considerado o mais preciso dentre os métodos não-numéricos. O

⁷ J. Labus, Mathematical Determination of the Impedance of Aerials, *Z. f. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik*, 41, 1933.

⁸ S.A. Schelkunoff, Theory of Antennas of Arbitrary Size and Shape, *Proc. I.R.E.*, 29, 1941.

⁹ S.A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*, John Wiley & Sons, 1952.

¹⁰ L. V. King, On the Radiation Field of a Perfectly Conductive Base Insulated Cylindrical Antenna Over a Perfectly Conducting Plane Earth, and the Calculation of Radiation Resistance and Reactance, *Transactions of Royal Society*, A236, pp. 381-422, London, 1937.

¹¹ E. Hallén, Transmitting and Receiving Qualities of Antennas, *Nova Acta Upsaliensis*, Séries IV, vol.11, pp. 1-43, 1938.

Método dos Momentos¹², devido a Duncan e Hinchey, é um método numérico baseado em Elementos Finitos, o qual não é limitado à forma geométrica de um dipolo simétrico. O Método dos Momentos apresenta custo computacional mais elevado que seus demais predecessores, mas, com o advento dos computadores digitais, tornou-se um dos métodos mais populares para a determinação da impedância própria e mútua de irradiadores eletromagnéticos genéricos.

● No presente capítulo apresentaremos apenas uma análise qualitativa aproximada da componente reativa X_A , com base na idéia de Schelkunoff de que uma antena pode ser interpretada como sendo formada a partir de uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos, conforme mostra a Figura 15. Observe, no entanto, que a discussão que segue não constitui a apresentação do Método da Perturbação da Antena Bicônica propriamente, mas apenas a idéia inicial que conduziu a ele.

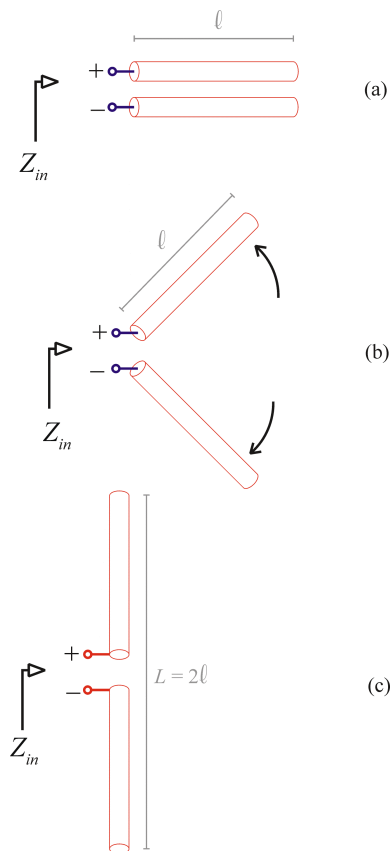


Figura 15: Transformações geométricas aplicadas sucessivamente em uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos de modo a formar um dipolo simétrico de comprimento $L = 2\ell$.

¹² R.H. Duncan and F.A. Hinchey, Cylindrical Antenna Theory, *J. Res. NBS*, vol 64D, September-October 1960, pp. 569-584.

- Para qualquer linha de transmissão de comprimento ℓ , sem perdas e com impedância característica Z_0 , a impedância Z_{in} em seus terminais de entrada relaciona-se com a sua impedância de carga Z_L através de¹³:

$$Z_{in} = Z_0 \left(\frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg}(\beta\ell)} \right) \quad (58)$$

onde $\beta = 2\pi/\lambda$.

- Mas, como a antena é interpretada como sendo formada a partir de uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos, então $Z_L \rightarrow \infty$. Daí (58) torna-se

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1}{j \tan(\beta\ell)} = -jZ_0 \left(\frac{1}{\tan(\beta\ell)} \right) \quad (59)$$

sendo a impedância Z_0 da linha de transmissão assim formada aproximada pela impedância do espaço livre $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ [Ω]. A Figura 16 mostra o gráfico de $X_A = \operatorname{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ em função de $L = 2\ell$.

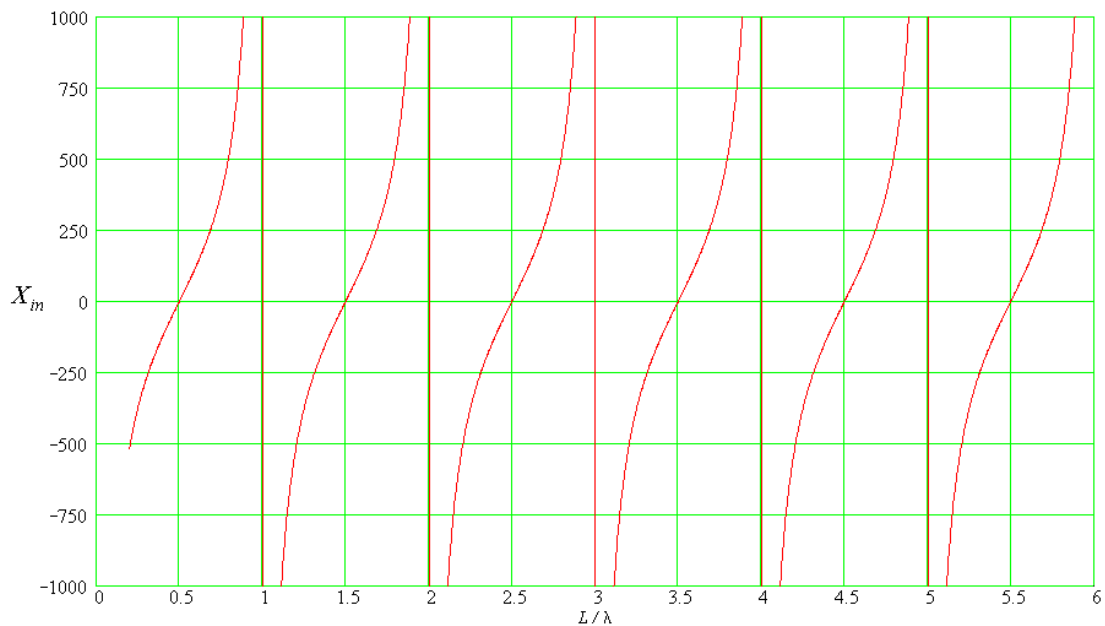


Figura 16: Gráfico de $X_A = \operatorname{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ em função de $L = 2\ell$.

¹³ J.D.Kraus and K.R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGrawHill, 1973.

⇒ Note na Figura 16 que X_A se alterna entre capacitiva e indutiva função do comprimento elétrico $2\ell/\lambda = L/\lambda$.

⇒ Observe também que $Z_A = Z_{in}$ é puramente resistiva para um número ímpar de meios comprimentos de onda.

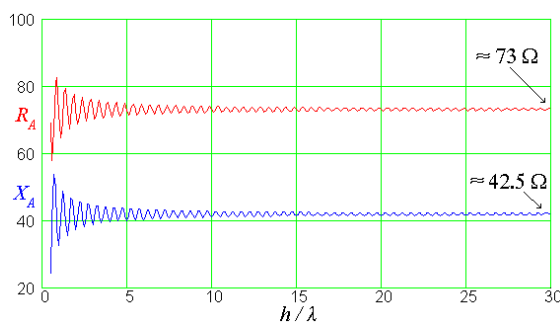
⇒ Portanto, a menor antena que apresenta $X_A \approx 0$ é o dipolo de meia-onda.

⇒ O comportamento apenas aproximado de $X_A = \text{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ mostrado na Figura 16 pode ser determinado com precisão através do programa Zi_CyDip.exe, referido em parágrafos anteriores.

Exemplo 5: Um transmissor de rádio opera na faixa de frequência compreendida entre $f_{\min} = 24$ MHz a $f_{\max} = 30$ MHz, utilizando como antena um dipolo simétrico horizontal de comprimento $L = 5.6$ m. O dipolo encontra-se localizado no topo de um morro cujo solo é de baixa condutividade, de modo que a antena situa-se bem acima¹⁴ do nível do solo de alta condutividade (solo úmido) e pode ser considerada como imersa no espaço livre. O fio de cobre utilizado na construção do dipolo é de bitola 12AWG cujo diâmetro é 2 mm.

- Determine $Z_A = R_A + jX_A$ para $f_{\min} = 24$ MHz.
- Determine $Z_A = R_A + jX_A$ para $f_{\max} = 30$ MHz.
- Determine a frequência f_r de operação do transmissor tal que $\text{Im}\{Z_A\} = X_A \approx 0$, isto é, determine a frequência de operação do transmissor para a qual o dipolo se torne uma **Antena Ressonante**.

¹⁴ Uma antena situada a uma altura h maior de que 30λ do solo condutor é denominada **Antena Elevada**, e para todos os efeitos práticos pode ser considerada imersa no espaço livre. A figura abaixo mostra $Z_A = R_A + jX_A$ para um dipolo simétrico horizontal de meia onda e de raio $a \ll \lambda$ em função de sua altura relativa h/λ do solo de condutividade infinita. Note que para $h > 30\lambda$ $Z_A \approx 73 + j42.5\Omega$, que é a impedância de entrada obtida com o programa Zi_CyDip.exe para um dipolo simétrico de meia onda de espessura infinitesimal imerso no espaço livre:



C:\DJGPP\Out>Zi_CyDip 1E-300 1 0.5
 Cylindrical wire radius: 1e-300 [mm]
 Dipole full length: 0.5 [m]
 Operating wavelength: 1 [m]
 Zin= 73.1481+42.5553i [ohm] (referred to the input terminals)

Solução:

$$\text{a) } f_{\min} = 24 \text{ MHz} \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{c}{f_{\min}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{24 \text{ MHz}} = 12.5 \text{ m}$$

Utilizando o programa Zi_CyDip.exe temos:

C:\DJGPP\Out>Zi_CyDip 2 12.5 5.6

Cylindrical wire radius: 2 [mm]

Dipole full length: 5.6 [m]

Operating wavelength: 12.5 [m]

Zin= 52.7351-90.4881i [ohm] (referred to the input terminals)

Portanto $Z_A \approx 52.7 - j90.5 \Omega$ para $f_{\min} = 24 \text{ MHz}$.

$$\text{b) } f_{\max} = 30 \text{ MHz} \rightarrow \lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{30 \text{ MHz}} = 10.0 \text{ m}$$

Utilizando o programa Zi_CyDip.exe temos:

C:\DJGPP\Out>Zi_CyDip 2 10.0 5.6

Cylindrical wire radius: 2 [mm]

Dipole full length: 5.6 [m]

Operating wavelength: 10 [m]

Zin= 113.257+201.588i [ohm] (referred to the input terminals)

Portanto $Z_A \approx 113.3 + j201.6 \Omega$ para $f_{\max} = 30 \text{ MHz}$.

c) Utilizando o programa Zi_CyDip.exe com o raio do fio condutor fixo em 2mm, tamanho do dipolo fixo em 5.6m e, por tentativas, variando o comprimento de onda de operação λ até que $\text{Im}\{Z_A\} = X_A \approx 0$ temos:

C:\DJGPP\Out>Zi_CyDip 2 11.5932 5.6

Cylindrical wire radius: 2 [mm]

Dipole full length: 5.6 [m]

Operating wavelength: 11.5932 [m]

Zin= 66.8847+0.00219826i [ohm] (referred to the input terminals)

Portanto $Z_A \approx 66.9 + j0 \Omega$ para $\lambda_r = 11.5932 \text{ m}$.

Daí,

$$f_r = \frac{c}{\lambda_r} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{11.5932 \text{ m}} = 25.877 \text{ MHz}$$

7 Relação de Ondas Estacionárias (ROE)

● Para um linha de transmissão de comprimento ℓ , sem perdas, com impedância característica Z_0 e terminada por uma impedância de carga Z_L a razão entre os valores máximo e mínimo da amplitude da onda estacionária (seja de tensão V ou de corrente I) estabelecida ao longo do comprimento ℓ da linha, é definida através de¹⁵:

$$\text{ROE} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (60)$$

sendo ROE a **Relação de Onda Estacionária** (SWR – *standing wave ratio*) ou Coeficiente de Onda Estacionária (COE) na linha de transmissão e

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (61)$$

sendo Γ o **Coeficiente de Reflexão**.

⇒ Note que se a linha de transmissão termina em sua impedância característica, isto é, se $Z_L = Z_0$, então $\Gamma = 0$ e $\text{ROE} = V_{\max}/V_{\min} = 1$ ao longo do comprimento ℓ da linha de transmissão, situação denominada de **Linha Plana**. Em outras palavras, **não é estabelecida nenhuma onda estacionária** na linha porque **não existe reflexão na terminação da linha** ($\Gamma = 0$).

⇒ Quando a linha de transmissão é alimentada por um transmissor e a impedância Z_L que termina a linha de transmissão é uma antena, em geral é considerado aceitável uma ROE de até 1.3 para efeito de não danificar o amplificador de saída do transmissor por excesso de corrente ou tensão ($\text{ROE} = V_{\max}/V_{\min} = I_{\max}/I_{\min}$).

Nota: A grande maioria dos transmissores incorporam um sistema de proteção denominado ALC (*Automatic Limiting Control*), que limita a potência de entrada do amplificador de saída quando a ROE ultrapassa um valor considerado inseguro para a operação do amplificador.

⇒ O Coeficiente de Reflexão Γ relaciona-se com a reflexão de potência na terminação da linha através de $|\Gamma|^2 = P_{\text{Refl}}/P_{\text{Inc}}$ sendo P_{Refl} e P_{Inc} respectivamente as potências refletidas e incidente na terminação. A potência P_{Refl} é refletida de volta para o transmissor.

Nota: Define-se Perda de Retorno como $\alpha = -20 \log|\Gamma|$ [dB]

⇒ A potência fornecida pela linha de transmissão à carga (à antena) é $P_{\text{Inc}}(1 - |\Gamma|^2)$.

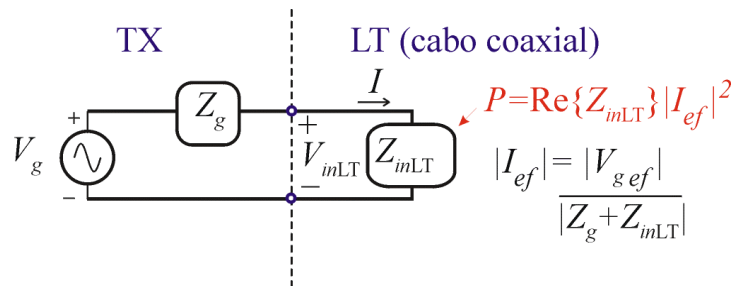
¹⁵ J.D.Kraus and K.R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGrawHill, 1973.

Exemplo 6: O transmissor do **Exemplo 5** possui uma potência de saída de 1KW e uma impedância nominal de saída de $52\ \Omega$. O transmissor é conectado à antena dipolo por um cabo coaxial RG-8/U cuja impedância característica é $Z_0 = 52\ \Omega$ e cujo comprimento é 10m.

- Determine a potência de alimentação do dipolo para as situações de operação caracterizadas nos itens a), b) e c) do **Exemplo 5**.
- Determine a ROE no cabo coaxial para as situações de operação caracterizadas nos itens a), b) e c) do **Exemplo 5**.

Solução:

O TX é um gerador de tensão V_g com impedância interna $Z_g = 52\ \Omega$ conforme mostra a figura abaixo:



O TX desenvolve uma potência $P_{\max} = 1\text{ KW}$ sobre a carga constituída pela impedância de entrada Z_{inLT} da linha de transmissão RG-8/U quando $Z_{inLT} = Z_g^* = 52\ \Omega$, isto é, $P_{\max} = 1\text{ KW}$ quando ocorre Máxima Transferência de Potência (MTP) entre o TX e o cabo coaxial.

Portanto, quando $Z_{inLT} = Z_g^* = 52\ \Omega$, o valor eficaz da tensão V_{inLT} é máximo e dado por

$$V_{inLT\ ef} = \sqrt{P_{\max} \cdot Z_{inLT}} = \sqrt{1\text{KW} \cdot 52\ \Omega} = 228.03\ \text{Vrms}$$

Do divisor de tensão formado por Z_g e Z_{inLT} na figura temos que

$$V_{inLT} = V_g \left(\frac{Z_{inLT}}{Z_g + Z_{inLT}} \right)$$

Daí, com $Z_{inLT} = Z_g^* = 52\ \Omega$ e $V_{inLT\ ef} = 228.03\ \text{Vrms}$ temos

$$V_{g\ ef} = V_{inLT\ ef} \left| \frac{Z_g + Z_{inLT}}{Z_{inLT}} \right| = 228.03\ \text{Vrms} \left| \frac{52\ \Omega + 52\ \Omega}{52\ \Omega} \right| = 456.07\ \text{Vrms}$$

Mas Z_{inLT} **não é** igual a $Z_g^* = 52\ \Omega$ porque o cabo coaxial não termina em sua impedância característica $Z_0 = 52\ \Omega$ e sim na impedância de entrada Z_A do dipolo. Portanto Z_{inLT} necessita ser determinado através de (58) para os valores de Z_A e λ respectivos às situações a), b) e c) do **Exemplo 5**:

$$Z_{inLT} = Z_0 \left(\frac{Z_A + jZ_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)}{Z_0 + jZ_A \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)} \right)$$

sendo $Z_0 = 52\Omega$ a impedância característica do cabo coaxial e $\ell = 10\text{m}$ o seu comprimento.

A potência na entrada do cabo coaxial (Potência Incidente) é

$$P_{\text{Inc}} = \text{Re}\{Z_{\text{inLT}}\} |I_{\text{ef}}|^2 = \text{Re}\{Z_{\text{inLT}}\} \left| \frac{V_{g\text{ef}}}{Z_g + Z_{\text{inLT}}} \right|^2$$

sendo $Z_g = 52\Omega$ a impedância interna do gerador e $V_{g\text{ef}} = 456.07\text{ Vrms}$ a sua tensão a circuito aberto.

O Coeficiente de Reflexão é dado por (61):

$$\Gamma = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0}$$

A potência entregue à antena, isto é, ao dipolo simétrico, é dada por

$$P_{\text{Ant}} = P_{\text{Inc}} (1 - |\Gamma|^2)$$

A ROE é dada por (60):

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

- Para o item **a)** do **Exemplo 5**, $Z_A \approx 52.7 - j90.5\Omega$ e $\lambda = 12.5\text{ m}$. Daí temos que

$$Z_{\text{inLT}} = Z_0 \left(\frac{Z_A + jZ_0 \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)}{Z_0 + jZ_A \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)} \right) = 19.2 + j43.7\Omega$$

$$P_{\text{Inc}} = \text{Re}\{Z_{\text{inLT}}\} \left| \frac{V_{g\text{ef}}}{Z_g + Z_{\text{inLT}}} \right|^2 = 572.34\text{ W}$$

$$\Gamma = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} = -0.06 + j0.651$$

$$P_{\text{Ant}} = P_{\text{Inc}} (1 - |\Gamma|^2) = 327.6\text{ W}$$

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 4.8$$

- Para o item **b)** do **Exemplo 5**, $Z_A \approx 113.3 + j201.6\Omega$ e $\lambda = 10.0\text{ m}$. Daí temos que

$$Z_{\text{inLT}} = Z_0 \left(\frac{Z_A + jZ_0 \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)}{Z_0 + jZ_A \text{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)} \right) = 113.3 + j201.6\Omega$$

$$P_{\text{Inc}} = \operatorname{Re}\{Z_{\text{inLT}}\} \left| \frac{V_{g\text{ef}}}{Z_g + Z_{\text{inLT}}} \right|^2 = 346.7 \text{ W}$$

$$\Gamma = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} = 0.747 + j0.308$$

$$P_{\text{Ant}} = P_{\text{Inc}} (1 - |\Gamma|^2) = 120.2 \text{ W}$$

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 9.4$$

Nota: Com uma ROE de 9.4:1 muito provavelmente o amplificador final do transmissor será destruído por excesso de corrente ou tensão ($\text{ROE} = \frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}}$), caso o ALC não limitar a potência de saída.

- Para o item c) do **Exemplo 5**, $Z_A \approx 66.9 + j0 \Omega$ e $\lambda = 11.5932 \text{ m}$. Daí temos que

$$Z_{\text{inLT}} = Z_0 \left(\frac{Z_A + jZ_0 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)}{Z_0 + jZ_A \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell\right)} \right) = 48.5 + j12.2 \Omega$$

$$P_{\text{Inc}} = \operatorname{Re}\{Z_{\text{inLT}}\} \left| \frac{V_{g\text{ef}}}{Z_g + Z_{\text{inLT}}} \right|^2 = 984.3 \text{ W}$$

$$\Gamma = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} = -0.019 + j0.124$$

$$P_{\text{Ant}} = P_{\text{Inc}} (1 - |\Gamma|^2) = 968.8 \text{ W}$$

$$\text{ROE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 1.29$$

⇒ Portanto a maior potência entregue ao dipolo simétrico ocorre para $f = 25.877 \text{ MHz}$ (item c) do **Exemplo 5**) quando o dipolo torna-se **ressonante** e a sua resistência de entrada é relativamente próxima da impedância característica $Z_0 = 52 \Omega$ do cabo coaxial.

⇒ Em outras palavras, para maximizar a potência irradiada por uma antena a condição de **Máxima Transferência de Potência** $Z_g = Z_L^*$ deve ser obedecida em cada terminação ao longo do trajeto que vai da saída do transmissor até os terminais de entrada da antena.

8 Abertura Efetiva

● Assim como uma antena transmissora irradia energia eletromagnética, de forma dual, uma antena receptora capta energia eletromagnética. A **Área de Recepção Máxima** ou **Abertura Efetiva Máxima** de uma antena receptora define uma **área equivalente** ou **abertura equivalente** através da qual a antena extrai a máxima energia possível de uma onda eletromagnética que sobre ela incide:

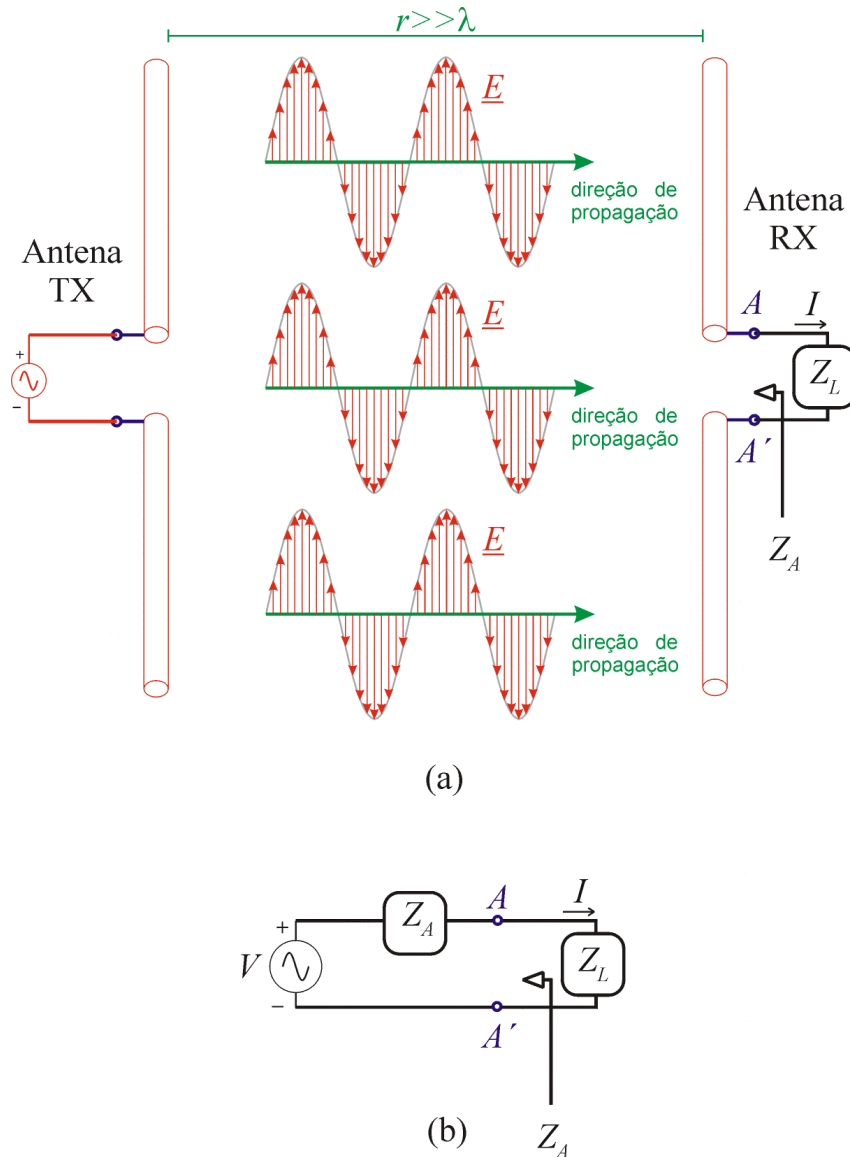


Figura 17: (a) Onda eletromagnética incidindo sobre a antena receptora RX em sua direção de maior ganho ($\theta = 90^\circ$). Note que a polarização da antena RX é compatível com a polarização da onda eletromagnética incidente. (b) V é o valor eficaz (rms) da tensão induzida ao longo da antena RX e que aparece em seus terminais $A - A'$ a circuito aberto como consequência da onda eletromagnética incidente. $Z_A = R_A + jX_A$ é a impedância “vista” nos terminais da antena RX. $Z_L = R_L + jX_L$ é a impedância “vista” nos terminais de entrada do receptor conectado à antena RX.

Da Figura 17(b) temos:

$$I = \frac{V}{Z_A + Z_L} \quad (62)$$

● Define-se como **Abertura Efetiva** ou **Área de Recepção** A_{RX} a razão entre a potência fornecida à carga (isto é, ao receptor conectado na antena RX) e a densidade de potência média¹⁶ S_i [W/m^2] na frente de onda que incide sobre a antena RX:

$$A_{RX} = \frac{R_L I^2}{S_i} \quad [m^2] \quad (63)$$

sendo I o valor eficaz da corrente na carga $Z_L = R_L + jX_L$ e S_i é o **Vetor de Poynting Médio** na superfície formada pela **frente de onda** que incide sobre a antena RX, frente de onda que pertence à onda eletromagnética irradiada pela antena TX.

De (62) e (63) temos:

$$A_{RX} = \frac{R_L I^2}{S_i} = \frac{R_L V^2}{S_i [(R_A + R_L)^2 + (X_A + X_L)^2]} \quad [m^2] \quad (64)$$

● A máxima tensão induzida ocorre na situação mostrada na Figura 17(b), quando:

(I) A antena RX está orientada na direção de máxima ganho em relação à onda eletromagnética incidente.

e

(II) A antena RX apresenta mesma polarização da onda incidente.

● Na situação da Figura 17(b), a máxima potência transferida à carga ocorre na condição $Z_A = Z_L^*$, condição que define a **Abertura Efetiva Máxima** ou **Área de Recepção Máxima**:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2 R_A}{S_i (R_A + R_A)^2} = \frac{V^2}{4S_i R_A} \quad [m^2] \quad (65)$$

¹⁶ Média temporal no período $T = 1/f$ do gerador senoidal constituído pelo transmissor conectado à antena TX. Já foi discutido no Capítulo II que a média temporal é originada do **Vetor de Poynting**

Médio $\underline{S} = \text{Re}\{\underline{\bar{S}}\} \left[\frac{W}{m^2} \right]$ porque expressa a densidade superficial de potência média

$\underline{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{E}(t) \times \underline{H}(t) dt$ da onda eletromagnética **irradiada** pela antena, medida em [W/m^2],

análoga ao conceito de **Potência Útil** no contexto de Teoria de Circuitos Elétricos.

⇒ Mas $R_A = R_r + R_p$, onde R_r é a resistência de radiação da antena e R_p é a resistência de perdas da antena, de modo que (65) torna-se:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i(R_r + R_p)} \quad [m^2] \quad (66)$$

Nota: Observe que se a antena possui resistência de perda R_p igual a sua resistência de radiação R_r , a área de recepção se reduz à metade com relação à mesma antena sem perdas.

⇒ Se a antena RX não apresenta nem perdas ôhmicas nem perdas dielétricas, então a sua eficiência é 100% e $R_p \approx 0$. Nesta situação (66) é re-escrita como

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i R_r} \quad [m^2] \quad (67)$$

⇒ Para a grande maioria das **Antenas de Abertura** a **Área de Recepção Máxima** da antena é da mesma ordem de grandeza da área física da antena. Para refletores parabólicos, por exemplo, ela se situa entre 50 a 65% da área física dos mesmos.

8.1 Altura Efetiva

● A Figura 18 mostra a tensão V eficaz (rms) que aparece nos terminais de um dipolo imerso em um campo elétrico \underline{E} variando senoidalmente no tempo, originado de uma onda eletromagnética incidente:

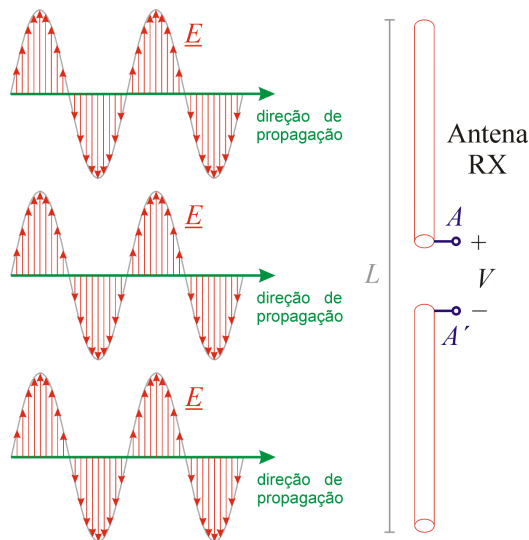


Figura 18: Tensão V que surge nos terminais $A - A'$ a circuito aberto como consequência da onda eletromagnética incidente.

- O valor da tensão V pode ser determinado por

$$V = \int_0^L \frac{E}{\sqrt{2}} \cdot d\ell = E_{\text{rms}} L_e \quad [\text{V}] \quad (68)$$

onde L_e é o **Comprimento Efetivo** ou **Altura Efetiva** do dipolo e E_{rms} é o valor eficaz (rms) do campo elétrico \underline{E} paralelo ao dipolo na onda incidente.

- Mas de (31) temos que o **Vetor de Poynting Médio** na superfície formada pela **frente de onda** que incide sobre a antena RX é

$$S_i = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_0} = \frac{\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2}{Z_0} = \frac{E_{\text{rms}}^2}{Z_0} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (69)$$

onde E_0 é o valor instantâneo máximo do campo elétrico \underline{E} e $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \quad [\Omega]$ é a impedância do espaço livre.

- Substituindo (69) em (67) temos

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4S_i R_r} = \frac{V^2}{4 \frac{E_{\text{rms}}^2}{Z_0} R_r} \quad [\text{m}^2] \quad (70)$$

- Substituindo (68) em (70) temos

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4 \frac{E_{\text{rms}}^2}{Z_0} R_r} = \frac{(E_{\text{rms}} L_e)^2}{4 \frac{E_{\text{rms}}^2}{Z_0} R_r} = \frac{Z_0 L_e^2}{4 R_r} \quad [\text{m}^2] \quad (71)$$

ou

$$L_e = 2 \sqrt{\frac{A_{\text{RX(max)}} R_r}{Z_0}} \quad [\text{m}] \quad (72)$$

onde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \quad [\Omega]$ é a impedância do espaço livre e R_r é a resistência de radiação da antena e $A_{\text{RX(max)}}$ é a **Abertura Efetiva Máxima** ou **Área de Recepção Máxima**.

➔ Portanto, o **Comprimento Efetivo** ou **Altura Efetiva** de um dipolo é a **dimensão linear equivalente** L_e através da qual a antena extrai a máxima energia possível de uma onda eletromagnética que sobre ela incida.

Exemplo 7: O Determine a Abertura Efetiva e a Altura Efetiva para um dipolo curto sem perdas e para um dipolo curto com perdas.

Solução:

Vimos no Capítulo II que a resistência de radiação R_r de um dipolo curto é dada por

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2$$

Substituindo R_r em (67), e com o auxílio de (69), obtemos a Abertura Efetiva de um dipolo curto **sem perdas**:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i R_r} = \frac{(E_{rms} L_e)^2}{4 \left(\frac{E_{rms}^2}{120\pi} \right) 80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 = 0.119\lambda^2 \quad [m^2] \quad (73)$$

Substituindo R_r em (66), e com o auxílio de (69), obtemos a Abertura Efetiva de um dipolo curto **com perdas**:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i (R_r + R_p)} = \frac{(E_{rms} L_e)^2}{4 \left(\frac{E_{rms}^2}{120\pi} \right) \left(80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2 + R_p \right)} = \frac{30\pi L_e^2}{80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2 + R_p} \quad [m^2] \quad (74)$$

onde R_p é a resistência de perdas da antena.

De (72) e (73) obtemos a Altura Efetiva de um dipolo curto **sem perdas**:

$$L_e = 2\sqrt{\frac{A_{RX(max)} R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{\frac{3}{8\pi} \lambda^2 R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \lambda \sqrt{\frac{R_r}{120\pi}} = \frac{\sqrt{5}}{20\pi} \lambda \sqrt{R_r} \quad [m] \quad (75)$$

De (72) e (74) obtemos a Altura Efetiva de um dipolo curto **com perdas**:

$$L_e = 2\sqrt{\frac{A_{RX(max)} R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{\frac{30\pi L_e^2}{80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2 + R_p} R_r}{120\pi}} \quad [m] \quad (76)$$

Isolando o valor de L_e em (76):

$$L_e = \frac{\sqrt{5}}{20\pi} \lambda \sqrt{R_r - R_p} \quad [m] \quad (77)$$

8.2 Abertura Efetiva Máxima e Diretividade

- Consideremos a situação da Figura 17(a) na qual a antena transmissora TX irradia uma onda eletromagnética que é captada pela antena receptora RX distante r da antena TX.
- Se a antena TX fosse isotrópica então a densidade de potência média¹⁷ na frente de onda que incide sobre a antena RX seria

$$S_0 = \frac{P_{TX}}{4\pi r^2} \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (78)$$

onde P_{TX} é potência irradiada pela antena TX.

- Discutimos no Capítulo I que o irradiador isotrópico não existe. Portanto a antena TX apresenta uma diretividade $D_{TX} > 1$ que origina uma densidade de potência média $S_{TX} [W/m^2]$ na frente de onda incidente sobre a antena RX, densidade de potência média que é dada por (46) com $P_a = P_{TX} [W]$ e $S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) = S_{TX} [W/m^2]$:

$$\begin{aligned} D_{TX} &= \frac{U_{\max}}{U_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) r^2}{S_{\text{med}} r^2} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{S_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\frac{P_a}{4\pi r^2}} = \\ &= \frac{S_{TX}}{\frac{P_{TX}}{4\pi r^2}} = \frac{S_{TX}}{S_0} \end{aligned} \quad (79)$$

ou seja

$$S_{TX} = S_0 D_{TX} = \frac{P_{TX}}{4\pi r^2} D_{TX} \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (80)$$

onde $S_{TX} [W/m^2]$ é a densidade de potência média na frente de onda que incide sobre a antena RX, D_{TX} é a diretividade da antena transmissora e P_{TX} é potência irradiada pela antena transmissora.

- A potência máxima $P_{RX} [W]$ extraída pela antena RX da frente de onda com que sobre ela incide com densidade $S_{TX} [W/m^2]$ é função da **Abertura Efetiva Máxima** $A_{RX(\max)} [m^2]$ da antena RX, dada por (65):

$$P_{RX} = S_{TX} A_{RX(\max)} = \frac{P_{TX} D_{TX} A_{RX(\max)}}{4\pi r^2} [W] \quad (81)$$

ou

¹⁷ Média temporal no período $T = 1/f$ do gerador senoidal constituído pelo transmissor conectado à antena TX.

$$D_{TX} A_{RX(max)} = \frac{P_{RX}}{P_{TX}} 4\pi r^2 \quad (82)$$

- Se a antena da direita na Figura 17(a) fosse usada como antena transmissora e antena da esquerda fosse usada como antena receptora a Equação (82) ainda seria válida nesta nova situação desde que se tenha o cuidado de trocar os índices da Diretividade e da Abertura Efetiva Máxima¹⁸, isto é:

$$D_{RX} A_{TX(max)} = \frac{P_{RX}}{P_{TX}} 4\pi r^2 \quad (83)$$

- Igualando (82) e (83) temos

$$\frac{D_{TX}}{A_{TX(max)}} = \frac{D_{RX}}{A_{RX(max)}} \quad (84)$$

- Se a antena TX transmissora fosse um irradiador isotrópico sua diretividade D_{TX} seria unitária e a sua Abertura Efetiva Máxima seria dada por

$$A_{TX(max)ISO} = \frac{A_{RX(max)}}{D_{RX}} \quad (85)$$

⇒ A Equação (85) estabelece que a Abertura Efetiva Máxima de um irradiador isotrópico utilizado como transmissor é igual à razão entre a Abertura Efetiva Máxima e Diretividade de qualquer outra antena utilizada como receptor.

- Suponhamos que a antena receptora seja um dipolo curto. Vimos no Exemplo 3 que a diretividade de um dipolo curto é $D_{RX} = \frac{3}{2}$. Do Exemplo 7 Equação (73) temos que a Abertura Efetiva Máxima de um dipolo curto é $A_{RX(max)} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 = 0.119\lambda^2 \text{ [m}^2\text{]}$. Substituindo estes valores em (85) temos:

$$A_{TX(max)ISO} = \frac{A_{RX(max)}}{D_{RX}} = \frac{\frac{3}{8\pi} \lambda^2}{\frac{3}{2}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (86)$$

- Substituindo (86) em (85) obtemos a Abertura Efetiva Máxima de uma antena em função de sua Diretividade:

$$A_{RX(max)} = D_{RX} \frac{\lambda^2}{4\pi} = D \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (87)$$

¹⁸ P_{TX} e P_{RX} não trocam de índices porque seus índices $\{.\}_{TX}$ e $\{.\}_{RX}$ referem-se a potências geradas respectivamente **no local do transmissor e no local do receptor**.

9 Largura de banda

Denomina-se **Largura de Banda** de uma antena a faixa de frequências na qual ela opera satisfazendo determinado parâmetro de performance.

Os parâmetros de performance mais comuns que variam com a frequência e que são utilizados para definir a **Largura de Banda** são:

- Impedância de entrada (ROE)
- Ganho
- Largura de Feixe
- Posição do Lóbulo Principal
- Polarização

A Largura de Banda (LB) pode ser especificada:

- (I) **Sob forma percentual:** Utilizado quando a largura de banda é bem menor que a frequência central. Por exemplo: Uma antena opera com ROE máxima de 1.3 entre 195 Mhz e 205 Mhz, sendo este o valor de ROE máximo a partir do qual o ALC do transmissor entra em ação. Logo,

$$LB = \frac{205 - 195}{200} = 0.05 = 5\%$$

- (II) **Pelo posicionamento de frequências (frequência superior e inferior):** Utilizado quando a frequência superior for maior ou igual ao dobro da frequência inferior. Por exemplo: Uma antena Log-Periódica mantém um ganho de 10 ± 1 dB entre 6 e 30 Mhz, caindo rapidamente fora desta faixa. Logo, $LB = \frac{30}{6} = 5 \rightarrow LB = 5 : 1$.

10 Exercícios de Revisão

- 1) Calcule a diretividade D de uma antena isotrópica utilizando o conceito de Padrão de Potência.

Solução:

$$D = 4\pi / \Omega_a \text{ sendo}$$

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{rad}^2] \text{ o ângulo sólido do feixe de irradiação.}$$

Para uma antena isotrópica o Padrão de Potência é $P(\theta, \phi) = 1, \forall \theta, \forall \phi$. Daí,

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi} d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} [1 - (-1)] d\phi = 2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = 2[\phi]_0^{2\pi} = 4\pi \quad [\text{rad}^2]$$

E, portanto,

$$D = 4\pi / \Omega_a = 1$$

- 2) Um dipolo horizontal de comprimento total $L = 8 \text{ m}$, alimentado no centro por um gerador de tensão $v(t) = V_{pk} \cos(2\pi \cdot 3.5 \times 10^6 t)$, é construído com um par de fios de cobre de bitola 12AWG. O dipolo encontra-se suficientemente afastado do solo e a condutividade deste é baixa, de modo que é desprezível a influência do solo sobre a antena.

Determine:

- A resistência de radiação da antena.
- O ganho desta antena em dBi.
- A abertura efetiva.
- O ângulo sólido do feixe de irradiação em estereoradianos.

Solução:

- a) Do gerador temos $f = 3.5 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = c/f = 85.7 \text{ m}$. Como $L/\lambda \leq 0.1$, a antena em questão é um dipolo curto.

Logo,

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2 [\Omega], \quad L_e = L/2 .$$

Daí

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{L}{2\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{8 \text{ m}}{2 \cdot 85.7 \text{ m}} \right)^2 = 1.7\Omega$$

$$\text{b) } G = \eta D = \left(\frac{R_r}{R_r + R_p} \right) D$$

Do Exemplo 3 temos $D = 1.5$ e do Exemplo 4 temos $R_{p(ac)} = 0.58 \Omega$.

Portanto,

$$G = \eta D = \left(\frac{R_r}{R_r + R_p} \right) D = \left(\frac{1.7\Omega}{1.7\Omega + 0.58\Omega} \right) 1.5 = 1.12$$

$$G_{db_i} = 10 \log G = 10 \log(1.12) = 0.49 \text{ dBi}$$

$$\text{c) De (74) } A_{RX(\max)} = \frac{30\pi L_e^2}{80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda} \right)^2 + R_p} [\text{m}^2], \quad L_e = L/2 . \quad \text{Portanto:}$$

$$A_{RX(\max)} = \frac{30\pi (4 \text{ m})^2}{80\pi^2 \left(\frac{4 \text{ m}}{85.7 \text{ m}} \right)^2 + 0.58\Omega} = 655.6 \text{ m}^2$$

$$\text{d) } D = 4\pi/\Omega_a \rightarrow \Omega_a = \frac{4\pi}{D} = \frac{4\pi}{1.5} = 8.38 \text{ sr}$$

- 3) A densidade de potência medida em um ponto p do espaço tridimensional a 10 km de uma antena transmissora é $6 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$. A propagação se dá no espaço livre com o lobo principal da antena transmissora apontado para p . A frequência de operação é 100 Mhz.

Determine:

- O módulo do campo magnético em p .
- A tensão a circuito aberto que surge nos terminais de uma antena receptora localizada em p sabendo-se que seu ganho é 3 dBi, que sua eficiência é 100% e que sua resistência de radiação é 50Ω .
- A potência que está sendo irradiada pela antena transmissora sabendo-se que sua diretividade é +20dB com relação ao radiador isotrópico e que sua eficiência é 100%.

Solução:

a) De (32):

$$S = \frac{1}{2} |H|^2 Z_0 \rightarrow |H| = \sqrt{\frac{2S}{Z_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 6 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}{120\pi \Omega}} = 0.178 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$$

b)

$$G = 10^{\frac{G_{\text{dBi}}}{10}} = 10^{\frac{3}{10}} \approx 2$$

$$\lambda = c/f = \frac{300 \times 10^6 \text{ m/s}}{100 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

De (51) temos $G = \eta D$ e de (87) temos $A_{\text{RX(max)}} = D \frac{\lambda^2}{4\pi}$. Daí

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{G}{\eta} = \frac{(3 \text{ m})^2}{4\pi} \frac{2}{1.0} = 1.43 \text{ m}^2$$

De (65) temos

$$V = 2\sqrt{A_{\text{RX(max)}} S_i R_r} \text{ [Vrms]}$$

$$V = 2\sqrt{1.43 \text{ m}^2 \cdot 6 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 50\Omega} = 41.4 \mu\text{Vrms}$$

c) De (46) temos

$$D = \frac{S_{\text{max}}(\theta_{\text{max}P}, \phi_{\text{max}P})}{S_{\text{med}}} = \frac{S_{\text{max}}(\theta_{\text{max}P}, \phi_{\text{max}P})}{\frac{P_a}{4\pi r^2}} \rightarrow P_a = \frac{4\pi r^2 S_{\text{max}}(\theta_{\text{max}P}, \phi_{\text{max}P})}{D}$$

Mas $G = \eta D$, daí

$$P_a = \frac{4\pi r^2 \eta S_{\text{max}}(\theta_{\text{max}P}, \phi_{\text{max}P})}{G}$$

$$G = 10^{\frac{G_{dB}}{10}} = 10^{\frac{20}{10}} = 100$$

$$r = 10 \times 10^3 \text{ m}$$

$$P_a = \frac{4\pi r^2 \eta S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{G} = \frac{4\pi r^2 \times 1.0 \times 6 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}{100} = 0.075 \times 10^{-3} \text{ W}$$

4) Determine a expressão da Intensidade de Radiação de um dipolo curto.

Solução:

De (34):

$$U(\theta, \phi) = S(\theta, \phi) r^2 \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$$

De (31):

$$S(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{Z_0} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

E da Equação (II) da Tabela II do Capítulo II temos para Campo Distante:

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Portanto

$$E_0(\theta, \phi) = \frac{I_0 \ell \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Dai

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= S(\theta, \phi) r^2 = \frac{1}{2} \frac{E_0^2(\theta, \phi)}{Z_0} r^2 \frac{\left(\frac{I_0 \ell \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} \right)^2 r^2}{2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = \\ &= \frac{I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{4\epsilon_0^2 c^2 \lambda^2} = \frac{I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8 \left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) \epsilon_0^2 c^2 \lambda^2} = \\ &= \frac{I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8 \left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) \epsilon_0^2 c^2 \lambda^2} = \frac{I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8 \left(\frac{1}{\epsilon_0 c} \right) \epsilon_0^2 c^2 \lambda^2} = \frac{I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8\epsilon_0 c \lambda^2} = \\ &= \frac{120\pi I_0^2 \ell^2 \sin^2 \theta}{8\lambda^2} = 15\pi I_0^2 (\ell/\lambda)^2 \sin^2 \theta \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right] \end{aligned}$$